

Differentialrechnung für Fkt. Einer Variablen

Ziel: Maß für lokale Änderungen einer Funktion

Bei Entscheidungen sind oft nicht die absoluten Kosten interessant, sondern vielmehr die Veränderung, die eine Produktion mit sich bringt.

Grundlagen

Bsp.: Kostenfunktion: Gerade, nichtlineare Kurve

Stichwort: Fixkosten, Variable Kosten, proportional/überproportional steigend

Differenzenquotient

Herleitung: Steigung der Sekanten zwischen zwei Kurvenpunkten.

$$\frac{\text{Ordinattendifferenz}}{\text{Abszissendifferenz}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Die Sekantensteigung (**durchschnittliche Steigung**) ist vom **Ausgangspunkt** x_0 und von der **Veränderung** Δx abhängig. Sie nimmt je nach Wahl der Punkte andere Werte an.

Grundproblem der Differentialrechnung: Definition eines Steigungsbegriffs

Für jeden Punkt einer beliebigen Kurve soll die Steigung in diesem Punkt werden

Differentialquotient

Grenzwert des Differenzenquotienten: Steigung der Kurve im Punkt $P(x_0, f(x_0))$

Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 : Die Funktion ist dort differenzierbar

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Die Gerade durch den Punkt heißt Tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$



Stetigkeit

(Zeichnen ohne abzusetzen)

Wenn $f(x)$ als ein Polynom (Quadratische/ lineare Funktionen) vorliegt, ist dieses innerhalb der geschlossenen $[\underline{x}, \overline{x}]$ bzw. offenen $[\underline{x}, <$ oder $<, \overline{x}$ oder $<, <]$ Intervalle stetig.

Überprüfen auf Stetigkeit:

Grenzwertbetrachtung an Grenzen des Intervalls und an den Polstellen

$$\lim_{x \rightarrow \text{Intervallgrenze-}} f(x) \stackrel{=?}{=} f(x) \stackrel{=?}{=} \lim_{x \rightarrow \text{Intervallgrenze+}} f(x)$$

Keine Stetigkeit an der Stelle $x = \text{Intervallgrenze}$, nur rechts- oder linksseitige Stetigkeit. (Je nachdem zu welchem Intervall das \leq Zeichen gehört. Rechtseitig z.B., wenn das Intervall rechts vom \leq Zeichen steht)

Differenzierbarkeit

(Zeichnen ohne Knick; Gegenbeispiel: $|x|$)

Voraussetzung: Funktion muss stetig sein

$f(x)$ ist als quadratische/lineare Funktion differenzierbar im Intervall $] [$

1. Ableitung bilden \rightarrow stetig in den Intervallgrenzen?

Bsp: Die Funktion $|x|$ ist an der Stelle $x = 0$ stetig aber nicht differenzierbar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = +1$$

Bei der Betragsfunktion existieren die einseitigen Ableitungen (rechtsseitige = linksseitige Differenzierbarkeit), stimmen aber nicht überein. Daher kann der Grenzwert der Differenzenquotienten, also die Ableitung $f'(0)$, nicht existieren.

Stellen an denen keine Ableitung existieren: Funktion ist „glatt“, hat aber Punkte, an denen die Tangente parallel zu y-Achse verläuft

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{für } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} & \text{für } x < 0 \end{cases}$$



Einige Ableitungsregeln

$$f(x) = x^n \quad f(x) = y = x^3$$
$$f'(x) = nx^{n-1} \quad f'(x) = y' = 3x^2$$

Konstante Funktion

$$f(x) = c \quad f'(x) = 0 \quad f(x) = 2 \quad f'(x) = 0$$

Faktorregel

$$g(x) = c \cdot f(x) \quad f'(x) = c \cdot f'(x) \quad f(x) = y = 2x^3 \quad y' = 6x^2$$

Produktregel

$$y(u \cdot v) \quad f(x) = y = x^2 \sqrt{x}, \quad x > 0 \quad u = x^2 \quad v = \sqrt{x} = x^{1/2}$$
$$y' = v u' + u v' \quad y' = 2x\sqrt{x} + x^2 \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2}x^{3/2} \quad u' = 2x \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

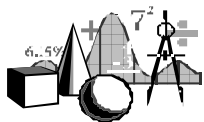
Quotientenregel

$$y = \frac{u}{v} \quad y = \frac{100x^2 + 150}{x} \quad u = 100x^2 + 150 \quad v = x$$
$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad y' = \frac{100x^2 - 150}{x^2} \quad u' = 200x \quad v' = 1$$

Kettenregel

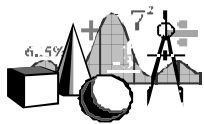
Verwendung bei zusammengesetzten Funktionen

$$h(x) = g(f(x)) \quad = g(z) \quad h(x) = \sqrt{(x^2 + 1)} \quad g = \sqrt{z} \quad \rightarrow g' = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$
$$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x) = g'(z) \cdot z' \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x \quad z = x^2 + 1 \rightarrow z' = 2x$$



Integral/ Differentialtabelle

$y' = f'(x)$	$y = f(x)$	$Y = F(x)$	
0	$c \quad (c \in \mathbb{R})$	Cx	Konstante Faktorregel
1	x	$0,5 \cdot x^2$	
$n x^{n-1}$	x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	
$n z^{n-1} z'$	z^n		
$vu' + uv'$	$u \cdot v \quad u' \cdot v'$	$U \cdot v' + u' \cdot v$	Produktregel
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$		Quotientenregel
$-1/x^2$	$1/x$	$\ln x $	
$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$	
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}	$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$	
$\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}$	
$\frac{-1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}}$	$\frac{1}{\sqrt[n]{x}}$	$\frac{n}{n-1} \sqrt[n]{x^{n-1}}$	
$e^x \quad /ze^z$	$e^x \quad /e^z$	e^x	!!!!
$a^x \ln a$	a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$!!!
$1/x$	$\ln x$	$X \cdot \ln x - x$	
$\cos x$	$\sin x$	$-\cos x$!!!!!!
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$-\ln \cos x $!!!
$\sin 2x$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x$	
$-\sin 2x$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x$	
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$!!!





Merkblatt Kurvendiskussion

Unter der Kurvendiskussion einer Funktionsgleichung versteht man die Zusammenstellung der wichtigsten Eigenschaften ihres Bildes mit anschließender Zeichnung

I) Definitionsraum

Die Funktion $f(x)$ ist als relationale Funktion stetig im Definitionsraum

$$D = \mathbb{R} \setminus \{ \}$$

II) Ableitungen

III) Stellen mit waagerechter Tangente

Extremwerte: notwendige Bedingung: $y' = 0$ muss unbedingt erfüllt werden

Entscheiden ob Hoch, Tief oder Sattelpunkt

hinreichende Bedingung: $y'' < 0$ Maximum

Rechtskrümmung; Abnahme der Steigung; Kurve ist konkav

$y'' > 0$ Minimum

Linkskrümmung; Zunahme der Steigung; Kurve ist konvex

da die hinreichende Bedingung viel verlangt, und oft nicht erfüllt werden kann,

muss man in y' nach einem Vorzeichenwechsel schauen: bei Max von + nach -

bei Min von - nach +

IV) **Wendepunkt** notwendige Bedingung: $y'' = 0$ Achtung, wenn $y' = y'' = 0$ = Sattelpunkt

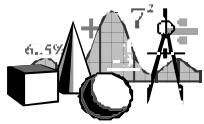
hinreichende Bedingung: $y''' \neq 0$

nur möglich, wenn x Achse in y'' mit einer Steigung $\neq 0$ geschnitten wurde,

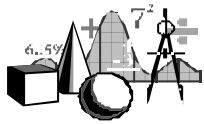
ansonsten Vorzeichenwechsel in y'' betrachten

V) Monotonieverhalten

Intervallweise Betrachtung ob (monoton)steigend/fallend



- VI) Nullstellen des Zählers**
- 1- fache Nullstelle: Schnittstelle
 - 2- fache Nullstelle: Berührstelle
 - 3- fache Nullstelle: Sattelpunkt
- VII) Nullstellen des Nenners**
- 1- fache Nullstelle: Polstelle mit Vorzeichenwechsel
 - 2- fache Nullstelle: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel
- wie im Zähler: Hebbare Definitionslücke
- VIII) Symmetrie**
- Punktsymmetrie: nur ungerade Hochzahlen
zum Ursprung: $f(x) = f(-x)$
 - Achsensymmetrie: nur gerade Hochzahlen
zur y-Achse: $f(x) = -f(-x)$
- IX) Krümmungsverhalten**
- konvex, konkav (wie der Rücken vom Schaf)
- IX) Untersuchung der Funktion**
- an den äußeren Rändern
 - An den Polstellen



Beispiel aus dem Skript:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$$

I) Definitionsraum

Die Funktion $f(x)$ ist als relationale Funktion stetig im Definitionsraum

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

Funktion ist stetig + differenzierbar

II) Ableitungen

$$f'(x) = \frac{x^4 - 9x^2}{(x^2 - 3)^2} \quad f''(x) = \frac{6x^3 + 54x}{(x^2 - 3)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(18x^2 - 54)(x^2 - 3) - 6x(6x^3 + 54x)}{(x^2 - 3)^4}$$

III) Stellen mit waagerechter Tangente

$$f'(x_e) = 0 \quad x_e^4 - 9x_e^2 = 0 \quad x_e^2(x_e^2 - 9) = 0 \quad x_{e1} = 0 \quad x_{e2} = 3 \quad x_{e3} = -3$$

$$f''(0) = 0 \quad f''(-3) < 0 \rightarrow \text{lok. Max} \quad f''(3) > 0 \rightarrow \text{lok. Min}$$

V) Monotonieverhalten

Intervallweise Betrachtung ob (monoton)steigend/fallend

$(-\infty; -3]$ monoton steigend

$[-3; -\sqrt{3})$ monoton fallend

$(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ monoton fallend

$(\sqrt{3}; 3]$ monoton fallend

$(3; \infty]$ monoton steigend

VI) Nullstellen des Zählers

1- fache Nullstelle: Schnittstelle

$$x_3 = 0 \text{ einzige NS}$$

VII) Nullstellen des Nenners

2- fache Nullstelle: Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

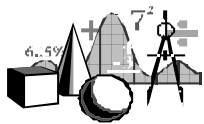
VIII)

Symmetrie

nicht erkennbar

IX) Krümmungsverhalten

konvex, konkav (wie der Rücken vom Schaf)



IX) Untersuchung der Funktion

an den äußeren Rändern

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \infty} = \infty$$

$$x \rightarrow -\infty \quad x \rightarrow \infty$$

An den Polstellen

$$\lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\sqrt{3}^+} = \infty$$

$$x \rightarrow -\sqrt{3}^- \quad x \rightarrow -\sqrt{3}^+$$

$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^-} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} = \infty$$

$$x \rightarrow \sqrt{3}^- = -\infty \quad x \rightarrow \sqrt{3}^+$$