

Kapitel 15: Differentialgleichungen

Differentialgleichungen = Gleichungen die Beziehungen zwischen einer Funktion und mindestens einer ihrer Ableitungen herstellen.

Kommen bei vielen **ökonomischen Modellen**, insbesondere im Zusammenhang mit Produktions- und Nutzenfunktionen, Wachstum und Marktprozessen, vor.

Bemerkung zur Schreibweise: Während in der Mathematik zwischen dem Funktionswert y und der Funktion $y = f(x)$ unterschieden wird, schreibt man in der Theorie der Differentialgleichung gewöhnlich kurz y anstelle von $f(x)$. Entsprechend werden die Ableitungen mit y' , y'' , ... bezeichnet.

Beispiele für Gleichungen, in der die Funktion y , deren Ableitungen sowie eine oder mehrere unabhängige Variable auftreten:

$$3 + 5y = y' + 2y''$$

$$y''' = x - y + y''$$

1. Grundbegriffe

Jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Gleichung erfüllt, heißt **Lösung der DGL**

Menge aller Lsg. = allgemeine Lsg. = **Lösungsmenge**

Ordnung der DGL = höchste auftretende Ableitung

kann nach dieser aufgelöst werden → **explizite** DGL, ansonsten **implizite** DGL.

Wenn mehrere Variablen und deren part. Ableitungen = **partielle** DGL ansonsten **gewöhnliche** DGL.

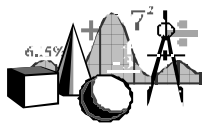
Eine DGL muß nicht notwendigerweise für alle Variablen- und Funktionswerte definiert sein, so ist

$$\frac{y'}{y^2} = \sqrt{(x-5)^2} \quad \text{beispielsweise nur für } x \geq 5 \text{ und } y \neq 0 \text{ definiert}$$

Es existiert kein einheitliches Lösungsverfahren, das auf beliebige DGLn der ab jetzt immer verwendeten Form $F(x, y, y(1), \dots, y(n)) = 0$ anwendbar ist. Nur für sehr spezielle Funktionen F konnten weitgehend voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Lösung entwickelt werden.

Bsp S.: 3 $y' = x + y$

Anhand der Zeichnung lässt sich leicht erklären, dass mehrere Funktionen die Differentialgleichung erfüllen können.



Differentialgleichungen 1. Ordnung

bisher einzige **Lsg.möglichkeit: Integration**

$$y'=f(x) \quad \text{Lsg: } y = \int f(x)dx = F(x)+c$$

oft: „Anfangswertprobleme“ ,d.h. eine spezielle Lsg. für $y(x_0) = c_0$ ist gesucht

Beispiel:

$$y' = \ln|x| + e^{x-1}; \quad \text{mit } y(1) = 2 \text{ als Anfangswert}$$

$$y = \int (\ln|x| + e^{x-1}) dx$$

Einschub:

$$\int \ln|x| dx = \int 1 \cdot \ln|x| dx \rightarrow \text{partielle Integration}$$

$$u' = 1 \quad v = \ln x$$

$$u = x \quad v' = \frac{1}{x}$$

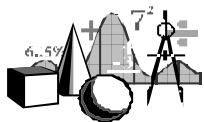
$$= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

weiter mit der Lösung:

$$\text{allg. Lsg.: } y = \int (\ln|x| + e^{x-1}) dx = x \cdot \ln|x| + x + e^{x-1} + c$$

$$\text{spez. Lsg.: } y(1) = 2 \text{ ergibt: } 1 \cdot \ln|1| + 1 + e^0 + c = 2 \quad \rightarrow \quad c = 2$$

$$y = x \ln|x| + x + e^{x-1} + 2$$

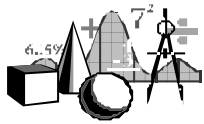


Weitere Lösungsmöglichkeit

Zur Einführung: gewöhnliche DGLn 1. Ordnung

Alles sind Spezialfälle von $F(x,y,y') = g(x,y)+h(x,y)*y' = 0$

Formel	Verfahren	Lösungsansatz
$g(x) + h(y) \cdot y' = 0$	Trennung der Variablen	$\int h(y) dy = - \int g(x) dx$
$g(x,y) + h(x,y)*y' = 0$	Totale DGL	$F(x,y) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ Überprüfen: $g'y = h'x$ Berechnung: (1) $G(x,y) = \int g(x,y) dx$ (2) $G'y = \frac{\partial G}{\partial y}$ (3) $C(y) := \int h(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y} dy$ (4) $F(x,y) = G(x,y) + C(y) = c$
$Y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$	Ähnlichkeits- differetialgleichungen Homogene DGL	(1) $z = \frac{y}{x} \rightarrow (i) \quad y = xz$ (ii) $g(z) = y' = z+xz'$ (2a) $g(z) = z$ $y = cx$ mit $c \in \mathbb{R}$ (2b) $g(z) \neq z$ (ii) liefert die DGL $\frac{z'}{g(z)-z} = \frac{1}{x}$, so daß man mit der Methode „Trennung der Variablen“ alle Lsg für $z(x)$ erhält. Aus $y(x) = xz(x)$ fließen schließlich alle Lösungen für $y(x)$
$Y' + p(x)y = r(x)$	Lineare DGL 1.Ordnung	(1) $P(x) = \int p(x) dx$ (2) $y(x) = e^{-P(x)} \cdot (c + \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx)$ (3) Dabei ist $c \in \mathbb{R}$ eine frei wählbare Konstante



1) Trennung der Variablen

$$g(x) + h(y) \cdot y' = 0 \quad \rightarrow \quad g(x) + h(y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\int h(y) dy = - \int g(x) dx$$

Da die Funktion g nur von x und die Funktion h ist nur von y abhängig ist, spricht man von DLG mit getrennten Variablen, die auf verschiedene Seiten gebracht werden

Bsp. 15.2.06, S. 5 allgemein selber durchlesen

Bsp. 15.2.07, S. 5 speziell selber durchlesen

Beispiel: $2xy - 1y' = 0$

$y' = 2xy$ mit $y(0) = 1$ als Anfangswert

Allgemeine Lsg:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad \frac{\partial y}{y} = 2x \partial x \quad \text{für } y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2 \int x dx \quad \text{für } y \neq 0$$

$$\ln |y| = x^2 + c^*$$

$$|y| = e^{x^2+c^*} = e^{x^2} \cdot e^{c^*} \quad \text{mit } c = e^{c^*} > 0$$

$$y = ce^{x^2}$$

Spezielle Lösung

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad ce^0 = 1 \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$y = e^{x^2}$$

Aufgabe 5.1.a rechnen



Oben ist ein Spezialfall der exakten DGL gewesen

2) Exakte bzw. Totale DGL

$$g(x,y) + h(x,y) \cdot y' = 0 \quad \text{wobei gilt : } g_y' = h_x' \quad (\text{immer zuerst überprüfen!})$$

Es wird davon ausgegangen, dass es eine Funktion $F(x,y)$ gibt, für die gilt:

$$F'_x = g(x,y)$$

Wie schon bekannt gilt, dass die Kreuzableitungen

$$F'_y = h(x,y)$$

(2. Partielle Abl.) einer Funktion immer identisch sind

$$F''_{xy} = g''_{yx} = h''_{xy} = F''_{yx}$$

Beispiel 15.3.2, S.8

Zum Bestimmen von $F(x,y)$:

$$G(x,y) + \int (h(x,y) - G'_y(x,y)) dy = c$$

So kommt man darauf:

$$\text{I: } F(x,y) = \int F'_x dx + c(y) = \int g(x,y) dx + c(y) = G(x,y) + c(y)$$

$$\text{II: diese Funktion nach } y \text{ ableiten: } F'_y = G'_y(x,y) + c'(y) = h(x,y)$$

$$\text{III: umgeformt ergibt sich: } c'(y) = h(x,y) - G'_y(x,y)$$

$$\text{IV: Integrieren ergibt: } c(y) = \int (h(x,y) - G'_y(x,y)) dy \quad \text{in I einsetzen}$$

Beispiel 1:

$$2y^2 x e^{x^2} + 2ye^{x^2} y' = 0 \quad \rightarrow \quad g = 2y^2 x e^{x^2} \quad \text{und } h = 2ye^{x^2}$$

$$\text{total? } g_y' = 4xye^{x^2} \quad h_x' = 4xye^{x^2} \quad \text{ja!}$$

$$G = \int g(x,y) dx = \int 2y^2 x e^{x^2} dx = y^2 e^{x^2}$$

$$G'_y = 2ye^{x^2}$$

$$c(y) = \int (h(x,y) - G'_y) dy = \int (2ye^{x^2} - 2ye^{x^2}) dy = \int 0 dy \quad \text{ist die Lsg des 2. Terms}$$

$$F(x,y) = G(x,y) + c(y) = y^2 e^{x^2} + 0 = c \quad \text{ist die Gesamtlösung}$$



Beispiel 2:

$$y + e^x + (x + \cos y) y' = 0$$

total? $g'_y = 1$ und $h'_x = 1$ ist gleich \rightarrow JA!

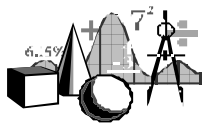
$$G = \int (y + e^x) dx = xy + e^x$$

$$G'_y = x$$

$$c(y) = \int (h(x, y) - G'_y(x, y)) dy = \int (x + \cos y - x) dy = \int \cos y dy = \sin y$$

$$\text{allg. Lsg.: } G(x, y) + c(y) = xy + e^x + \sin y = c$$

Aufgabe 5.1.b rechnen



3) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

$$F(x,y,y') = g(x,y) + h(x,y) \cdot y' = 0$$

Spezialfall homogene DGL :

$$g(x,y) = -g\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{und} \quad h(x,y) = 1$$

somit ergibt sich $g(x,y) + y' = 0$ und daraus $y' = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(z)$

Die Bezeichnung Ähnlichkeitsdifferentialgleichung leitet sich aus der Tatsache ab, dass mit jeder Lösung $y(x)$ auch jede durch Ähnlichkeitsabbildung bzgl. des Koordinatenursprungs aus $y(x)$ hervorgehende Funktionen wiederum eine Lösung darstellen.

Subst.: $z = \frac{y}{x}$ bzw.: $y = z \cdot x$ nach x Ableiten: $y' = x \cdot z' + z$, da

$y = u \cdot v$ mit $u = z$ und $v = x$ wird zu

$y' = u'v + uv'$ mit $u' = z'$ und $v' = 1$

$y' = xz' + z$ mit $y' = g(z)$ gleichsetzen

Beispiel:

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Subst. $z = \frac{y}{x}$ mit $y' = x \cdot z' + z$

Gleichsetzen von $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$ und $y' = x \cdot z' + z$ ergibt:

$$xz' + z = z - z^2 \quad \text{wird zu} \quad xz' = -z^2, \quad \text{bzw.:} \quad x \frac{dz}{dx} = -z^2$$

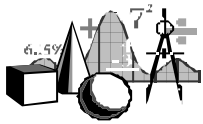
alles was ein x enthält wird auf eine Seite gebracht, alles was ein z enthält wird auf die andere Seite gebracht und anschließend integriert.

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + c$$

Rücksubst.: $\frac{x}{y} = \ln|x| + c$ oder $y = \frac{x}{\ln|x| + c}$

Aufgabe 5.1.c rechnen



4) Lineare DGL

Ein DGL heißt linear, wenn die Funktion $F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ eine lineare Funktion ist, d.h. wenn die DGL die Form:

$$F(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) := p_n(x)y^{(n)} + \dots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y - r(x) = 0 \text{ hat,}$$

wobei die p_i und r in einem Intervall stetige Funktionen der Variablen x sind.

Lineare DGL 1. Ordnung

$$p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = r(x) \quad | : p_1$$

$$y' + p(x) \cdot y = q(x)$$

bei $r(x)$ bzw. $q(x) = 0$: dann linear homogen \rightarrow Lsg. über Trennung der Variablen

ansonsten linear inhomogen \rightarrow Lsg. mit Eulerischen Multiplikator $e^{\int p(x) dx}$

allgemeiner Lösungsweg

$$y' + p(x) \cdot y = q(x) \quad | * e^{P(x)} \text{ (Achtung, das P ist groß uns somit das Integral von } p(x))$$

$$e^{P(x)} y' + e^{P(x)} p(x) y = e^{P(x)} q(x)$$

Ab hier entweder:

| \int Anwendung der Produktregel für Funktionen

$$e^{P(x)} y = \int e^{P(x)} q(x) dx$$

$$y = e^{-P(x)} \int e^{P(x)} q(x) dx$$

Oder alternativ :

$$e^{P(x)} p(x) y - e^{P(x)} q(x) + e^{P(x)} y' = 0 \quad \text{exakte DGL (ist aber etwas umständlicher als Alternative a)}$$

Bsp. 15.5.3, S.19 bringen



Beispiel:

$$y' + (-2x)y = e^{x^2}$$

Ausführlicher Weg:

$p(x): \int -2x \, dx = -x^2 \rightarrow$ Eulerscher Multiplikator: $m(x) = e^{-x^2}$ macht aus DGL exakte DG
 \rightarrow beide Seiten damit multiplizieren

$$e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = e^{-x^2+x^2} = e^{-x^2} e^{x^2} = \frac{e^{-x^2}}{e^{-x^2}} = 1 \quad | \text{ Integrieren nach } y$$

$$\rightarrow e^{-x^2} y = x + c \quad \text{nach } y \text{ hin auflösen}$$

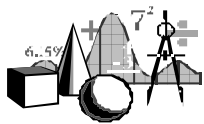
$$y = e^{x^2} (x+c)$$

Nur über Verwendung der Formel:

$$y(x) = e^{-P(x)} \cdot (c + \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx) = e^{x^2} \cdot (c + \int e^{x^2} e^{-x^2} dx) = e^{x^2} (x+c)$$

Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer spez. Lösung der inhomogenen DGL.

Aufgabe 5.1.d rechnen



Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Typ: $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$

a) homogene Lösung

a1) einfachster Fall: $y'' = 0$

damit vereinfacht sich die obige Formel zu:

$$p(x)y' + q(x)y = 0$$

ersetzt
$$y' = \frac{-q(x)}{p(x)} = c_1$$

damit ergibt sich:
$$y = c_1x + c_2$$

Diese Lösung besitzt immer 2 freie Konstante

a2) Allgemeiner Fall

Nützliche Aussagen über die „Bauart“ der allgemeinen Lösung:

Ein Paar y_1, y_2 von Lösungen heißt l.u., wenn es keine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt, für die gilt:

$$y_1(x) = c \cdot y_2(x)$$

Sind y_1 und y_2 l.u. (spezielle Lösungen), so ist auch jede Linearkombination von ihnen Lösung; sie bilden die allgemeine Lösung. (Siehe auch Def. Fundamentalsystem, S. 22, Skript)

Ziel: finden von zwei linear unabhängigen Lösungen

Bsp: lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffiziente (Vergleiche dazu Skript, S. 24):

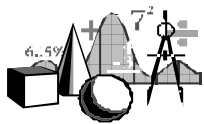
$$y = e^{\lambda x} \quad y' = \lambda e^{\lambda x} \quad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

für spez. Werte von λ ergeben sich spez. Lsg. der DGL

einsetzen in $y'' + py' + qy = 0$ ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \quad | :e^{\lambda x}$$

$\rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ charakteristische Gleichung, deren NS spezielle Lösung darstellen.



Es lassen sich 3 Fälle unterscheiden (Einsetzen von unterschiedlichen Werten für p und q):

1. Fall: 2 verschiedene reelle NS:

Setze $p = 3$ und $q = 2$

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \quad \rightarrow \lambda_1 = -1; \quad \lambda_2 = -2$$

Durch Linearkombination der beiden Eigenwerte erhält man die allgemeine Lösung des Problems:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

2. Fall: 1 reelle NS

Setze $p = 2$ und $q = 1$

$$y'' + 2y' + y = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \lambda_{1/2} = -1$$

Auch hier erhält man durch Linearkombination der beiden Eigenwerte die allgemeine Lösung:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$$

Herleitung über die Variation der Konstanten

3. Fall: Komplexe NS

z.B. $y'' + 2y' + 2y = 0$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \quad \lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm 1 \cdot i \quad \text{mit } p = 2 \text{ und } q = 2$$

$$\rightarrow \text{allg. Lsg.: } y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Aufgabe 5.1.e ii und i rechnen



Anfangswertaufgabe:

Suche nach spezieller Lösung, die den Anfangswertbedingungen für y und y' genügt.

Weiterführung des Beispiels aus Fall 1:

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \quad \text{mit } y(0) = 3$$

$$\text{und } y'(0) = -5$$

$$\text{allg. Lsg.: } y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$y(0) = 3 : \quad 3 = c_1 + c_2$$

$$y'(0) = -5 : \quad -5 = -c_1 - 2c_2 \quad \rightarrow c_1 = 1 \quad c_2 = 2$$

$$\text{spez.Lsg.: } y = e^{-x} + 2e^{-2x}$$

b) Inhomogene DGL:

allg. Lösung setzt sich zusammen aus Lösung der homogenen DGL und einer beliebigen spez. Lösung der inhomogenen DGL

Skript: Reduktion der Ordnung (Var. der Konstanten)

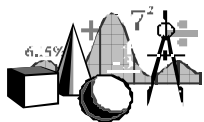
- man kennt eine Lösung der homogenen DGL ($y_1(x)$)
- die inhomogene hat dann eine spez. Lösung $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$
- durch Einsetzen der Lösung $y(x)$ in die inhomogene DGL reduziert sich deren Ordnung und wird lösbar:

$$p_n(x)y^{(n)} + \dots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = 0 \text{ hat eine Lösung der Form } y = y_1(x) z(x)$$

Beispiel 15.5.6, Seite 20/21 Skript:

$$3y + xy' - x^2 y'' = 0 \text{ hat als eine Lösung } y_1 = x^3 \text{ und somit auch } y(x) = x^3 z(x)$$

dies setzt man ein in die obige Formel und erhält $z = x^{-4}$ und somit auch $y = \frac{1}{x}$



Beispiel:

$$y'' - y = 2$$

1. Lösung des homogenen Teils:

$$y'' + py' + qy = 0 \quad \text{mit } p = 0 \text{ und } q = -1$$

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \quad \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$$

Damit ergibt sich als eine Lösung:

$$y_1(x) = e^x$$

2. Eine spezielle Lösung des inhomogenen DGL

$$\text{Ansatz } y_s = z(x) \cdot e^x$$

$$y' = z' \cdot e^x + ze^x$$

$$y'' = z''e^x + z'e^x + z'e^x + ze^x$$

einsetzen in $y'' - y = 2$ ergibt

$$z''e^x + 2z'e^x + ze^x - ze^x = 2$$

$$z''e^x + 2z'e^x = 2 \quad \text{Subst. } u = z'$$

$$u'e^x + 2ue^x = 2 \quad \left| \cdot e^{-x} \right.$$

$$u' + 2u = 2e^{-x}$$

Bestimmung der Eulerschen Zahl

$$u' + 2u = 2e^{-x} \quad \text{lineare DGL} \quad m = e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

$$e^{2x}u' + 2e^{2x}u = 2e^{-x} \cdot e^{2x} = 2e^x \quad \text{integrieren}$$

$$e^{2x} \cdot u = 2e^x$$

$$u = e^{-2x} 2e^x = 2e^{-x} = z' \quad \rightarrow z = -2e^{-x}$$

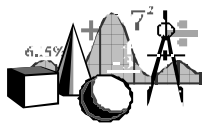
$$\rightarrow y_s = -2e^{-x} \cdot e^x = -2$$

3. Die allgemeine Lsg. Des inhomogenen DGL

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2$$

homogene Lösung + spezielle Lösung





einfacher (aber nicht im Skript): **Koeffizientenvergleich**

rechte Seite	linke Seite	
$r(x)$	Ansatz $y_s(x)$	
$r_0 + r_1x + \dots + r_n x^n$	$s_0 + s_1x + \dots + s_n x^n$	
ae^{bx}	ce^{bx}	homogene Lösung
$a_1 \sin bx + a_2 \cos bx$	$A \sin bx + B \cos bx$	

Ist $r(x)$ Summe von o.g. Ausdrücken muß auch als Ansatz deren Summe gewählt werden;
 sie können auch getrennt berechnet werden:

Bsp. von eben: $y'' - y = 2 \quad \rightarrow r(x) = 2$
 Ansatz $y_s = s_0 \quad \rightarrow y' = 0 \quad \rightarrow y'' = 0$
 einsetzen $-s_0 = 2 \quad \rightarrow s_0 = -2$ als spez. Lsg.

Bsp.: $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 2$
 homogene Lsg.: $y_h = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
 Ansatz $y_s = s_0 + s_1x + s_2x^2$
 $y'_s = s_1 + 2s_2x$
 $y''_s = 2s_2$

einsetzen: $2s_2 + 2s_1 + 4s_2x + 2s_0 + 2s_1x + 2s_2x^2 = 2x^2 + 2$
 Koeffizientenvergleich:
 $x^2 : 2s_2 = 2 \quad \rightarrow s_2 = 1$
 $x : 4s_2 + 2s_1 = 0 \quad \rightarrow 4 + 2s_1 = 0 \quad \rightarrow s_1 = -2$
 $c : 2s_2 + 2s_1 + 2s_0 = 2 \quad \rightarrow 2 - 4 + 2s_0 = 2 \quad \rightarrow s_0 = 2$

spez. Lsg: $y_s = 2 - 2x + x^2$
 allg.inh.Lsg.: $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2 - 2x + x^2$

Lineare Differentialgleichungen in der Ökonomie

Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding

Differentialgleichungsmodell der Versicherungsmathematik

(Selber durchlesen, S.28 und 29, Skript)

