Kapitel 15: Differentialgleichungen

Differentialgleichungen = Gleichungen die Beziehungen zwischen einer Funktion und mindestens einer ihrer Ableitungen herstellen.
Kommen bei vielen **ökonomischen Modellen**, insbesondere im Zusammenhang mit Produktions- und Nutzenfunktionen, Wachstum und Marktprozessen, vor.

Bemerkung zur Schreibweise: Während in der Mathematik zwischen dem Funktionswert y und der Funktion y = f(x) unterschieden wird, schreibt man in der Theorie der Differentialgleichung gewöhnlich kurz y anstelle von f(x). Entsprechend werden die Ableitungen mit y', y'',... bezeichnet.

Beispiele für Gleichungen, in der die Funktion y, deren Ableitungen sowie eine oder mehrere unabhängige Variable auftreten:

$3 + 5y = y' + 2y''$

$y''' = x - y + y''$

1. Grundbegriffe

Jede Funktion, die mit ihren Ableitungen die Gleichung erfüllt, heißt **Lösung der DGL**

Menge aller Lsg. = allgemeine Lsg. = **Lösungsmenge**

Ordnung der DGL = höchste auftretende Ableitung

kann nach dieser aufgelöst werden $\rightarrow$ **explizite** DGL, ansonsten **implizite** DGL.

Wenn mehrere Variablen und deren part. Ableitungen = **partielle** DGL ansonsten **gewöhnliche** DGL.

Eine DGL muß nicht notwendigerweise für alle Variablen- und Funktionswerte definiert sein, so ist

$\frac{y'}{y^2} = \sqrt{(x-5)^2}$ beispielsweise nur für $x \geq 5$ und $y \neq 0$ definiert

Es existiert kein einheitliches Lösungeverfahren, das auf beliebige DGLn der ab jetzt immer verwendeten Form F(x, y, y(1),...,y(n)) = 0 anwendbar ist. Nur für sehr spezielle Funktionen F konnten weitgehend voneinander unabhängige Methoden zur Bestimmung der allgemeinen Lösung entwickelt werden.

Bsp S.: 3 $y' = x + y$

Anhand der Zeichnung lässt sich leicht erklären, dass mehrere Funktionen die Differentialgleichung erfüllen können.

Differentialgleichungen 1. Ordnung

bisher einzige **Lsg.möglichkeit: Integration**

$y'=f(x) \qquad \text{Lsg: } y = \int f(x)dx = F(x)+c$

oft: „Anfangswertprobleme" ,d.h. eine spezielle Lsg. für $y(x_o) = c_o$ ist gesucht

Beispiel:

$y' = \ln|x| + e^{x-1}; \qquad \text{mit } y(1) = 2 \quad \text{als Anfangswert}$

$y \quad = \int (\ln|x| + e^{x-1})\, dx$

Einschub:

$\int \ln|x|\, dx = \int 1 \cdot \ln|x|\, dx \rightarrow$ partielle Integration

$u' = 1 \qquad v = \ln x$

$u = x \qquad v' = \frac{1}{x}$

$= x \cdot \ln|x| - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - x$

weiter mit der Lösung:

allg. Lsg.: $y \quad = \int (\ln|x| + e^{x-1})\, dx = x \cdot \ln|x| + x + e^{x-1} + c$

spez. Lsg.: $y(1) = 2$ ergibt: $1 \cdot \ln|1| + x + e^0 + c = 2 \qquad \rightarrow \quad c = 2$

$y = x\ln|x| + x + e^{x-1} + 2$

Weitere Lösungsmöglichkeit

Zur Einführung: gewöhnliche DGLn 1. Ordnung

Alles sind Spezialfälle von **F(x,y,y') = g(x,y)+h(x,y)*y' = 0**

Formel	Verfahren	Lösungsansatz
g (x) + h(y) · y' = 0	Trennung der Variablen	$\int h(y)\,dy = -\int g(x)dx$
g(x,y) + h(x,y)*y' = 0	Totale DGL	F(x,y) = c mit $c \in$ IR Überprüfen: g'y = h'x Berechnung: (1) G(x,y) = $\int g(x,y)dx$ (2) G'y = $\frac{\partial G}{\partial y}$ (3) C(y):= $\int h(x,y)-\frac{\partial G}{\partial y}\,dy$ (4) F(x,y) = G(x,y)+c(y) = c
Y' = $g\left(\frac{y}{x}\right)$	Ähnlichkeits-differetialgleichungen Homogene DGL	(1) $z = \frac{y}{x} \rightarrow (i) \quad y = xz$ (ii) g(z) = y' = z+xz' (2a) g(z) = z y = cx mit $c \in$ R (2b) g(z) $\neq$ z (ii) liefert die DGL $\frac{z'}{g(z)-z} = \frac{1}{x}$, so daß man mit der Methode „Trennung der Variablen" alle Lsg für z(x) erhält. Aus y(x) = xz(x) fließen schließlich alle Lösungen für y(x)
Y' + p(x)y = r(x)	Lineare DGL 1.Ordnung	(1) P(x) = $\int p(x)dx$ (2) y(x) = $e^{-P(x)} \cdot (c + \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx)$ (3) Dabei ist $c \in$ R eine frei wählbare Konstante

1) Trennung der Variablen

$$g(x) + h(y) \cdot y' = 0 \qquad \rightarrow g(x) + h(y)\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\int h(y)\,dy = -\int g(x)dx$$

Da die Funktion g nur von x und

die Funktion h ist nur von y abhängig ist, spricht man von

DLG mit getrennten Variablen, die auf verschiedene Seiten gebracht werden

Bsp. 15.2.06, S. 5 allgemein selber durchlesen

Bsp. 15.2.07, S. 5 speziell selber durchlesen

Beispiel: $2xy - 1y' = 0$

$y' = 2xy$ mit $y(0) = 1$ als Anfangswert

Allgemeine Lsg:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \qquad \frac{\partial y}{y} = 2x\,\partial x \quad \text{für } y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int x dx \qquad \text{für } y \neq 0$$

$$\ln|y| = x^2 + c^*$$

$$|y| = e^{x^2 + c^*} = e^{x^2} \cdot e^{c^*} \qquad \text{mit } c = e^{c^*} > 0$$

$$y = ce^{x^2}$$

Spezielle Lösung

$$y(0) = 1 \quad \rightarrow \quad ce^0 = 1 \quad \rightarrow c = 1$$

$$y = e^{x^2}$$

Aufgabe 5.1.a rechnen

Oben ist ein Spezialfall der exakten DGL gewesen

2) Exakte bzw. Totale DGL

$g(x,y) + h(x,y)*y' = 0$ wobei gilt : $g_y' = h_x'$ (immer zuerst überprüfen!)

Es wird davon ausgegangen, dass es eine Funktion F(x,y) gibt, für die gilt:

$F'x = g(x,y)$ Wie schon bekannt gilt, dass die Kreuzableitungen

$F'y = h(x,y)$ (2. Partielle Abl.) einer Funktion immer identisch sind

$F'xy = g'y = h'x = F'yx$

Beispiel 15.3.2, S.8

Zum Bestimmen von F(x,y):

$G(x,y) + \int (h(x,y) - G_y'(x,y))dy = c$

So kommt man darauf:

I: $F(x,y) = \int F'_x dx + c(y) = \int g(x,y)dx + c(y) = G(x,y) + c(y)$

II: diese Funktion nach y ableiten: $F'_y = G'_y(x,y) + c'(y) = h(x,y)$

III: umgeformt ergibt sich: $c'(y) = h(x,y) - G'_y(x,y)$

IV: Integrieren ergibt: $c(y) = \int h(x,y) - G'_y(x,y)dy$ in I einsetzen

Beispiel 1:

$2y^2 x\, e^{x^2} + 2ye^{x^2} y' = 0 \quad \rightarrow \quad g = 2y^2 xe^{x^2}$ und $h = 2ye^{x^2}$

total? $gy' = 4yxe^{x^2}$ $h_x' = 4xye^{x^2}$ ja!

$G = \int g(x,y)dx = \int 2y^2 xe^{x^2} dx = y^2 e^{x^2}$

$G_y' = 2ye^{x^2}$

$c(y) = \int h(x,y) - G(x,y)'y \; dy = \int (2ye^{x^2} - 2ye^{x^2})dy = \int 0 dy$ ist die Lsg des 2. Terms

$F(x,y) = G(x,y) + c(y) = y^2 e^{x^2} + 0 = c$ ist die Gesamtlösung

Beispiel 2:

$y + e^x + (x + \cos y)\, y' = 0$

total? $g'_y = 1$ und $h'_x = 1$ ist gleich $\rightarrow$ JA!

$G = \int (y + e^x)dx = xy + e^x$

$G_y' = x$

$c(y) = \int (h(x,y) - G'_y(x,y))dy = \int (x + \cos y - x)\, dy = \int \cos y\, dy = \sin y$

allg. Lsg.: $G(X,y)+c(y) = xy + e^x + \sin y = c$

Aufgabe 5.1.b rechnen

3) Ähnlichkeitsdifferentialgleichungen

F(x,y,y') = g(x,y)+h(x,y)*y' = 0

Spezialfall homogene DGL :

$g(x,y) = -g\left(\frac{y}{x}\right)$ und $h(x,y) = 1$

somit ergibt sich g(x,y)+y'=0 und daraus $y' = g\left(\frac{y}{x}\right) = g(z)$

Die Bezeichnung Ähnlichkeitsdifferentialgleichung leitet sich aus der Tatsache ab, dass mit jeder Lösung y(x) auch jede durch Ähnlichkeitsabbildunge bzgl. Des Koordinatenursprungs aus y(x) hervorgehende Funktionen wiederum eine Lösung darstellen.

Subst.: $z = \frac{y}{x}$ bzw.: $y = z \cdot x$ nach x Ableiten: $y' = x \cdot z' + z$, da

$y = u \cdot v$ mit $u = z$ und $v = x$ wird zu

$y' = u'v + uv'$ mit $u' = z'$ und $v' = 1$

$y' = xz' + z$ mit $y' = g(z)$ gleichsetzen

Beispiel:

$$y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$$

Subst. $z = \frac{y}{x}$ mit $y' = x \cdot z' + z$

Gleichsetzten von $y' = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2$ und $y' = x \cdot z' + z$ ergibt:

$xz' + z = z - z^2$ wird zu $xz' = -z^2$, bzw.: $x\frac{dz}{dx} = -z^2$

alles was ein x enthält wird auf eine Seite gebracht, alles was ein z enthält wird auf die andere Seite gebracht und anschließend integriert.

$$-\int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{1}{z} = \ln|x| + c$$

Rücksubst.: $\frac{x}{y} = \ln|x| + c$ oder $y = \frac{x}{\ln|x| + c}$

Aufgabe 5.1.c rechnen

4) Lineare DGL

Ein DGL heißt linear, wenn die Funktion $F(x,y,y^{(1)},...,y^{(n)}) = 0$ eine lineare Funktion ist, d.h. wenn die DGL die Form:

$F(x,y,y^{(1)},...,y^{(n)}) := p_n(x)y^{(n)}+...+p_1(x)y^{(1)}+p_0(x)y - r(x) = 0$ hat,

wobei die p_i und r in einem Intervall stetige Funktionen der Variablen x sind.

Lineare DGL 1. Ordnung

$p_1(x)y^{(1)}+p_0(x)y = r(x) \quad | : p_1$

$\quad y' + p(x) \cdot y = q(x)$

bei r(x) bzw. q(x) = 0: dann linear homogen $\rightarrow$ Lsg. über Trennung der Variablen

ansonsten linear inhomogen $\rightarrow$ Lsg. mit Eulerischen Multiplikator $e^{\int p(x)c}$

allgemeiner Lösungsweg

$y' + p(x) \cdot y = q(x) \qquad |* e^{P(x)}$ (Achtung, das P ist groß uns somit das Integral von p(x))

$e^{P(x)} y' + e^{P(x)} p(x) y = e^{P(x)} q(x)$

Ab hier entweder:

$| \int$ Anwendung der Produktregel für Funktionen

$e^{P(x)} y = \int e^{p(x)} q(x)\, dx$

$y = e^{-p(x)} \int e^{p(x)} q(x)\, dx$

Oder alternativ :

$e^{P(x)} p(x) y - e^{P(x)} q(x) + e^{P(x)} y' = 0$ exakte DGL (ist aber etwas umständlicher als Alternative a)

Bsp. 15.5.3, S.19 bringen

Beispiel:

$y' + (-2x)\, y = e^{x^2}$

Ausführlicher Weg:

p(x): $\int -2x\, dx = -x^2 \rightarrow$ Eulerscher Multiplikator: $m(x) = e^{-x^2}$ macht aus DGL exakte DG

$\rightarrow$ beide Seiten damit multiplizieren

$e^{-x^2} y' - 2xe^{-x^2} y = e^{-x^2+x^2} = e^{-x^2} e^{x^2} = \dfrac{e^{x^2}}{e^{x^2}} = 1$ | Integrieren nach y

$\rightarrow e^{-x^2} y = x + c$ nach y hin auflösen

$y = e^{x^2}(x+c)$

Nur über Verwendung der Formel:

$y(x) = e^{-P(x)} \cdot (c + \int r(x) \cdot e^{P(x)} dx) = e^{x^2} \cdot (c + \int e^{x^2} e^{-x^2} dx) = e^{x^2}(x+c)$

Die allgemeine Lösung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der homogenen DGL und einer spez. Lösung der inhomogenen DGL.

Aufgabe 5.1.d rechnen

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Typ: $y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = r(x)$

a) homogene Lösung

a1) einfachster Fall: $y'' = 0$

damit vereinfacht sich die obige Formel zu:

$p(x)\, y' + q(x)\, y = 0$

ersetzt $\quad y' = \dfrac{-q(x)}{p(x)} = c_1$

damit ergibt sich: $\quad y = c_1 x + c_2$

Diese Lösung besitzt immer 2 freie Konstante

a2) Allgemeiner Fall

Nützliche Aussagen über die „Bauart“ der allgemeinen Lösung:

Ein Paar y_1, y_2 von Lösungen heißt l.u., wenn es keine Konstante $c \in R$ gibt, für die gilt:

$$y_1(x) = c \cdot y_2(x)$$

Sind y_1 und y_2 l.u. (spezielle Lösungen), so ist auch jede Linearkombination von ihnen Lösung; sie bilden die allgemeine Lösung. (Siehe auch Def. Fundamentalsystem, S. 22, Skript)

Ziel: finden von zwei linear unabhängigen Lösungen

Bsp: lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffiziente *(Vergleiche dazu Skript, S. 24)***:**

$y = e^{\lambda x} \qquad y' = \lambda e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$

für spez. Werte von λ ergeben sich spez. Lsg. der DGL

einsetzen in $\quad y'' + py' + qy = 0$ ergibt:

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \qquad |:e^{\lambda x}$$

$\rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ charakteristische Gleichung, deren NS spezielle Lösung darstellen.

Es lassen sich 3 Fälle unterscheiden (Einsetzen von unterschiedlichen Werten für p und q):

1. Fall: 2 verschiedene reelle NS:

Setze p = 3 und q = 2

$y'' + 3y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad \rightarrow \lambda_1 = -1; \qquad \lambda_2 = -2$

Durch Linearkombination der beiden Eigenwerte erhält man die allgemeine Lösung des Problems:

$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$

2. Fall: 1 reelle NS

Setze p = 2 und q = 1

$y'' + 2y' + y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \qquad \rightarrow \lambda_{1/2} = -1$

Auch hier erhält man durch Linearkombination der beiden Eigenwerte die allgemeine Lösung:

$y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$ Herleitung über die Variation der Konstanten

3. Fall: Komplexe NS

z.B. $y'' + 2y' + 2y = 0$

$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \qquad \lambda_{1/2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm 1 \cdot i$ mit p = 2 und q = 2

$\rightarrow$ allg. Lsg.: $y = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Aufgabe 5.1.e ii und i rechnen

Anfangswertaufgabe:

Suche nach spezieller Lösung, die den Anfangswertbedingungen für y und y'genügt.

Weiterführung des Beispiels aus Fall 1:

$y'' + 3y' + 2y = 0$ mit $y(0) = 3$
und $y'(0) = -5$

allg. Lsg.: $y = c_1 e^{-x} + c_2\, e^{-2x}$ $\qquad y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2\, e^{-2x}$

$y(0) = 3: \qquad 3 = c_1 + c_2$

$y^1(0) = -5: \qquad -5 = -c_1 - 2c_2 \qquad \rightarrow c_1 = 1 \qquad c_2 = 2$

spez.Lsg.: $y = e^{-x} + 2e^{-2x}$

b) Inhomogene DGL:

allg. Lösung setzt sich zusammen aus Lösung der homogenen DGL und einer beliebigen spez. Lösung der inhomogenen DGL

Skript: Reduktion der Ordnung (Var. der Konstanten)

- man kennt eine Lösung der homogenen DGL $(y_1(x))$
- die inhomogene hat dann eine spez. Lösung $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$
- durch Einsetzen der Lösung y(x) in die inhomogene DGL reduziert sich deren Ordnung und wird lösbar:

$p_n(x)y^{(n)} + \ldots + p_1(x)y^{(1)} + p_0(x)y = 0$ hat eine Lösung der Form $y = y_1(x)\, z(x)$

Beispiel 15.5.6, Seite 20/21 Skript:

$3y + xy' - x^2y'' = 0$ hat als eine Lösung $y_1 = x^3$ und somit auch $y(x) = x^3\, z(x)$

dies setzt man ein in die obige Formel und erhält $z = x^{-4}$ und somit auch $y = \frac{1}{x}$

Beispiel:

$y'' - y = 2$

1. Lösung des homogenen Teils:

$y'' + py' + qy = 0$ mit $p = 0$ und $q = -1$

$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0$

$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm 1$

Damit ergibt sich als eine Lösung:

$y_1(x) = e^x$

2. Eine spezielle Lösung des inhomogenen DGL

Ansatz $y_s = z(x) \cdot e^x$

$y' = z' \cdot e^x + ze^x$

$y'' = z''e^x + z'e^x + z'e^x + ze^x$

einsetzen in $y'' - y = 2$ ergibt

$z''e^x + 2z'e^x + ze^x - ze^x = 2$

$z''e^x + 2z'e^x = 2$ Subst. $u = z'$

$u'e^x + 2ue^x = 2 \quad \Big| \cdot e^{-x}$

$u' + 2u = 2e^{-x}$

Bestimmung der Eulerschen Zahl

$u' + 2u = 2e^{-x}$ lineare DGL $\qquad m = e^{\int 2dx} = e^{2x}$

$e^{2x}u' + 2e^{2x}u = 2e^{-x} \cdot e^{2x} = 2e^x$ integrieren

$e^{2x} \cdot u = 2e^x$

$u = e^{-2x} 2e^x = 2e^{-x} = z' \qquad \rightarrow z = -2e^{-x}$

$\rightarrow y_s = -2e^{-x} \cdot e^x = -2$

3. Die allgemeine Lsg. Des inhomogenen DGL

$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - 2$

homogene Lösung + spezielle Lösung

einfacher (aber nicht im Skript): **Koeffizientenvergleich**

rechte Seite	linke Seite	
$r(x)$	Ansatz $y_s(x)$	
$r_o + r_1 x + \ldots + r_n x^n$	$s_o + s_1 x + \ldots + s_n x^n$	
ae^{bx}	ce^{bx}	homogene Lösung
$a_1 \sin bx + a_2 \cos bx$	$A \sin bx + B \cos bx$	

Ist r(x) Summe von o.g. Ausdrücken muß auch als Ansatz deren Summe gewählt werden; sie können auch getrennt berechnet werden:

Bsp. von eben: $y'' - y = 2 \quad \rightarrow r(x) = 2$

Ansatz $y_s = s_o \quad \rightarrow y' = 0 \quad \rightarrow y'' = 0$

einsetzen $-s_0 = 2 \quad \rightarrow s_o = -2$ als spez. Lsg.

Bsp.: $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 2$

homogene Lsg.: $y_h = e^{-x}\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$

Ansatz $y_s = s_o + s_1 x + s_2 x^2$

$y'_s = s_1 + 2s_2 x$

$y''_s = 2s_2$

einsetzen: $2s_2 + 2s_1 + 4s_2 x + 2s_o + 2s_1 x + 2s_2 x^2 = 2x^2 + 2$

Koeffizientenvergleich:

$x^2 : 2s_2 = 2 \quad \rightarrow s_2 = 1$

$x : 4s_2 + 2s_1 = 0 \quad \rightarrow 4 + 2s_1 = 0 \quad \rightarrow s_1 = -2$

$c : 2s_2 + 2s_1 + 2s_o = 2 \quad \rightarrow 2 - 4 + 2s_0 = 2 \quad \rightarrow s_0 = 2$

spez. Lsg: $y_s = 2 - 2x + x^2$

allg.inh.Lsg.: $y = e^{-x}\ (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + 2 - 2x + x^2$

Lineare Differentialgleichungen in der Ökonomie

Wachstumsmodell für das Volkseinkommen nach Boulding

Differentialgleichungsmodell der Versicherungsmathematik

(Selber durchlesen, S.28 und 29, Skript)