

Ökonomische Ungleichheit und ihre Messung

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit der Frage, wie ökonomische Ungleichheit festgestellt und gemessen wird. Ausgangspunkt ist die Sichtweise des Staates oder der Gesellschaft, die über diese Zustände Urteile fällen muß. Daraus haben sich in der Ökonomie und anderen Disziplinen Prinzipien entwickelt, die hier ohne Anspruch auf Vollständigkeit beschrieben und nur als Einführung in die Problematik verstanden werden sollen. Eine grobe Übersicht über die ökonomischen Sichtweisen der Problematik der Messung von Ungleichheit schließt sich dieser Darstellung an. Oft verwendete Ungleichheitskonzepte und -Indices werden dann in diesem Zusammenhang präsentiert, kursorisch diskutiert und die Relevanz für empirische Arbeiten aufgezeigt.

1 Verteilung und Staatstheorien

Im Folgenden soll ein grober Überblick über den Zusammenhang von Staatsvorstellungen und der Verteilungs- bzw. Umverteilungsproblematik vorgenommen werden. Dabei besteht kein Anspruch auf Vollständigkeit und wir beschränken uns auf eine Auswahl, die uns das Verteilungsproblem aus staatlicher Sicht näher bringt.¹

1. *Entitlement* Theorien
2. Einstimmigkeit und Pareto Verbesserungen
3. Utilitarismus
4. Das Rawl'sche Gerechtigkeitskriterium
5. Egalitarismus

¹Zu den folgenden Ausführungen siehe auch Atkinson and Stiglitz (1980), Kap. 11.

1.1 *Entitlement Theorien*

Diese Theorien vertreten einen Naturrechtsansatz und haben eine lange Geschichte, die auf z.B. Hobbes und Locke in der 2. Hälfte des 17. Jahrhundert zurückgeht.

Postulat: Jedes Individuum hat das Recht auf die Früchte über Arbeit.

Eine moderne Fassung findet sich z.B. bei Nozick (1974). Für ihn sind nicht Endzustände sind von Belang, sondern die Prozesse, die zu einem Zustand führen.

Gerechtigkeit ist nicht anhand eines Resultates, sondern anhand eines Prozesses definiert. Dies betrifft auch ökonomische Beziehungen, vor allem die Anfangsausstattung an z.B. Arbeit oder Kapital und die Prozesse, durch die diese transferiert werden.

Die Aufgabe des Staates ist es, für eine faire Anfangsausstattung zu sorgen. Ferner soll er dafür sorgen, daß Austausch fair stattfindet.

Drei Prinzipien:

1. Fairness in Anfangsausstattung
2. Fairer Austausch
3. Korrektur vergangener Ungerechtigkeiten

Diese drei Prinzipien betreffen u.a. folgende ökonomischen Gegebenheiten:

Ad 1) Anfangsausstattung, Startpunkt

Ad 2) freiwilliger Tausch, Vererbung, Schenkungen

Ad 3) anerkennt die Notwendigkeit, vergangene Ungerechtigkeiten zu korrigieren (Bsp.: Sklaverei)

Wenn der Staat sich mehr "einmisch", dann ist das eine Verletzung individueller Rechte. Nozick:

"... taxation of earnings from labour is on a par with forced labour."

Wenn Chancengleichheit und freiwilliger Austausch vorliegen, sollte die Staatsrolle minimal sein. ("Nachtwächterstaat") Wenn der Staat Leute zwingt, Steuern zu bezahlen, dann ist das ein unfairer Prozess.

Beispiel Mehrzahlung für ein Bundesligaspiel, wenn FC Bayern München kommt. Die Bayern-Spieler sind Millionäre, aber jeder Fan zahlt freiwillig.

Beim Fußball spielt dieser freiwillige Transfer vielleicht keine Rolle. Aber welche Rolle spielt Vererbung? Was bedeutet es, Chauffeur von Rockefeller im Vergleich zu Rockefeller selbst zu sein? Kann man sich aussuchen, einen 1-Euro-Job anzunehmen oder gar keine Arbeitslosenunterstützung zu bekommen? Was heißt in diesem Sinne "freiwilliger Austausch"? Gibt es eine Wahl zwischen Arbeiten oder Verhungern? Sind diese Wahlmöglichkeiten freiwillig?

Nozick setzt mit Wahl eher "freiwilligen Austausch" gleich mit freier Marktwirtschaft. Welche Rolle spielt dann aber das Problem der Marktmacht in der Realität?

1.2 Einstimmigkeit und Pareto Verbesserungen

Nozick kann in Bezug zu den Theoremen der Wohlfahrtsökonomik gesetzt werden. Diese sind²:

The First Fundamental Welfare Theorem If every relevant good is traded in a market at publicly known prices (i.e. if there is a complete set of markets), and if households and firms act perfectly competitively (i.e. as price takers), then the market outcome is Pareto optimal. That is, when markets are complete, *any competitive equilibrium is necessarily Pareto optimal.*

²Siehe z.B. Mas-Colell, Whinston and Green (1995), S. 308.

The Second Fundamental Welfare Theorem If household preferences and firm production sets are convex, there is a complete set of markets with publicly known prices, and every agent acts as a price taker, then *any Pareto optimal outcome can be achieved as a competitive equilibrium if appropriate lump-sum transfers of wealth can be arranged.*

Das erste Wohlfahrtstheorem ist ein Argument für einen Minimalstaat. Der Markt sorgt für ein wünschenswertes Resultat in Hinblick auf (Pareto-) Effizienz.

Drei Prinzipien:

1. Anfangs-/Ausgangspunkt
2. Prozess (vollkommener Konkurrenzmarkt)
3. Resultat (Pareto-effiziente Allokation)

Das erste Prinzip findet sich auch bei Nozick. Aber die Wohlfahrtsökonomik sorgt sich auch um das Resultat (*Outcome*), der Prozess ist nicht sehr wichtig:

Das Mittel heiligt den Zweck.

Dabei ist die Vorstellung von Wünschbarkeit die Forderung nach Einstimmigkeit, denn das ist es, was das Pareto-Effizienz eigentlich beinhaltet. Nach Pareto-Effizienz soll ja keiner schlechter und mindestens eine Person besser gestellt werden. Wenn ein Resultat so ist, dann wird dies einstimmig präferiert.

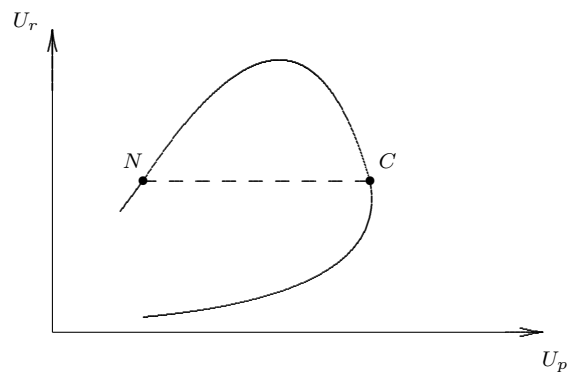
Damit hat der Staat eine andere Rolle als bei Nozick. Staatsinterventionen können manchmal wünschenswert sein.

Beispiel Wir gehen von einer Situation mit Nutzeninterdependenz aus.

$$U_p(C_p) \text{ und } U_r(C_r, C_p), \quad r = \text{reich}, p = \text{arm (poor)}, \quad \text{oder} \\ U_p(C_p) \text{ und } U_r(C_r, U_p(C_p)).$$

Grund dafür könnten paternalistische oder philanthropische Gefühle der Reichen gegenüber den Armen sein, oder die Reichen möchten sich gegen einen möglichen Zustand der Armut in ihren Entscheidungen versichert sehen, da die Reichen arm werden könnten. Wenn Nutzeninterdependenz vorliegt, dann gelten die Wohlfahrtstheoreme nicht. Aber es gibt trotzdem Raum für Pareto-verbessernde Transfers.

Abbildung 1: Nozick und Pareto-Verbesserungen



Wenn wir von dem Punkt N ausgehen, stellen alle Punkte zwischen N und C Pareto-Verbesserungen dar. Da bei Nutzeninterdependenz die Reichen auf die Armen achten, ist ein Punkt zwischen N und C besser.

Wenn solch ein Punkt freiwillig herbeigeführt wird, wäre das auch für Nozick in Ordnung. Aber es gibt ein potentiell *free-rider* Problem.

Beispiel: Wohlfahrt eines repräsentativen Reichen

$$W_R = U(Y_R - T_R) + \theta u\left(Y_P + \frac{\sum_{i=1}^{N_R} T_R}{N_P}\right),$$

wobei der Index R die Reichen und P die Armen bezeichnet. Es gebe $i = 1, \dots, N_R$ Reiche in der Ökonomie, die alle das gleiche Einkommen Y_R beziehen. Der Ausdruck $Y_R - T_R$ bezeichne das Einkommen eines Reichen minus seiner Transferzahlungen an die Armen. Der zweite Term in dem Nut-

zenausdruck eines Reichen berücksichtige den Nutzen eines Armen, gewichtet mit dem Faktor θ . Hierbei nehmen wir an, daß der Transfer, den ein Armer bekommt, der Summe der individuellen Transfers der Reichen an die Armen, geteilt durch die Anzahl armer Leute, entspricht.

Die Bedingung dafür, daß sich ein Transfer an die Armen aus Sicht eines Reichen lohnt, ist

$$MU_R < \frac{\theta}{N_P} MU_P,$$

wobei MU den Grenznutzen darstellt. Diese Bedingung ist oft nicht erfüllt, insbesondere dann, wenn die Anzahl der Armen N_P groß ist. Unter diesen Bedingungen wären private Transfers zu klein.

Wenn die Regierung aber die reichen Leute zwingt, an den Transfers teilzunehmen, könnten die Transfers jeden besser stellen. Wenn alle Reichen den gleichen Betrag zahlen *müssen*, dann lautet die Nutzenfunktion eines Reichen

$$W'_R = U(Y_R - T_R) + \theta u\left(Y_P + \frac{N_R \times T_R}{N_P}\right).$$

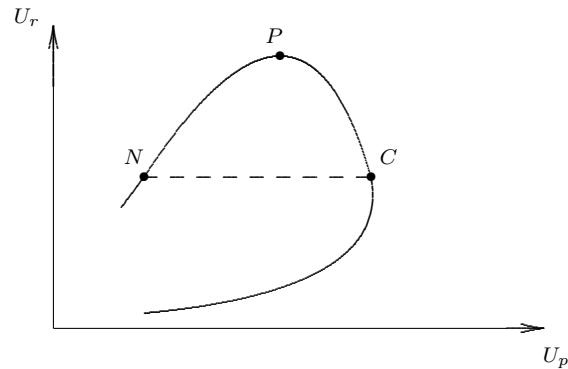
Nun ist die Bedingung für einen Transfer

$$MU_R < \theta \frac{N_R}{N_P} MU_P.$$

Diese Bedingung ist etwas leichter zu erfüllen, da $\frac{N_R}{N_P} > \frac{1}{N_P}$. Damit ist eine Theorie zur Staatsintervention gegeben, die Zwangsmittel rechtfertigt.

Die Bereitstellung eines öffentlichen Gutes wie Einkommensumverteilung ist ein Beispiel dafür, daß der Zweck die Mittel heiligt.

Abbildung 2: Pareto-Verbesserungen



Obwohl eine Verschiebung der Wohlfahrtsposition von N nach P eine Pareto-Verbesserung darstellt, ist nicht klar, warum die Ausgangsposition in N "gerecht" sein soll.

1.3 Der Utilitarismus

Ausgangspunkt ist im bisherigen Zusammenhang die Überlegung, warum es manchmal doch von Interesse aus Sicht eines repräsentativen Reichen sein kann, einen Punkt rechts von P zu wählen.

1.3.1 Ethische Präferenzen und Soziale Wohlfahrtsfunktion

Für die individuelle Interessen der Reichen scheint ein Punkt rechts von P schlecht zu sein. Aber manchmal ist so ein Punkt doch gewollt. Dies gilt deshalb, weil eine Verschlechterung der eigenen Position manchmal der Vorstellung entspricht, daß solch eine Position mit der Vorstellung einer "guten" Gesellschaft einhergeht.

Harsanyi (1955) argumentiert in diesem Zusammenhang, daß Individuen sogenannte "ethische Präferenzen" besitzen. Entscheidungen werden danach gefällt, wenn die Bedingung vorliegt, daß

"...moments when people force an impartial and impersonal attitude on themselves"

gelten.³ Diese Entscheidungssituation wird auch als Entscheidung unter dem "Schleier des Nichtwissens" (*Veil of Ignorance*) genannt, d.h. einer Situation, in der Entscheidungen getroffen werden, aber das Individuum nicht weiß, welche Position es ex post in der Gesellschaft einnehmen wird.

Ethische Präferenzen können dazu führen, dass Leute eine Regierung unterstützen, die eine Politik verfolgt, welche eine soziale Wohlfahrtsfunktion maximiert, in dem die eigenen Interessen nur ein Element darstellen.

1.4 Formen des Utilitarismus

Die utilitaristische Vorstellung der Bewertung von Gesellschaftszuständen geht davon aus, daß die Gesamtwohlfahrt von den Nutzen aller Mitglieder der Gesellschaft abhängt. Eine Darstellung dieses Zusammenhangs ist die *Bergson-Samuelson* Wohlfahrtsfunktion mit der Gestalt⁴

$$W(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$$

wobei $u_i, i = 1, \dots, n$ die Nutzenindices der Individuen darstellt.⁵ Die entscheidende Frage ist, welche spezielle Form die Funktion $W(\cdot)$ annimmt.

Eine frühe, auf Bentham (1748 - 1832) zurückgehende und oft gebrauchte Form ist

$$W' = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n.$$

Als Begründung für diese Form wird angeführt, daß Anonymität (*Imperso-*

³Eine ähnliche Vorstellung findet sich schon bei Smith (1759) in *The Theory of Moral Sentiments*. Smith arbeitet mit der Vorstellung eines *impartial spectator*, der die ethischen Entscheidungen eines rationalen Individuums leiten sollte. Adam Smith war zu dieser Zeit Inhaber des Lehrstuhls für *Moral Philosophy* an der Universität Glasgow. Einige der Gedanken dieses Buches spielen auch eine Rolle in seinem Werk *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, s. Smith (1776).

⁴Siehe Bergson (1938) und Samuelson (1947).

⁵Es sind in dieser Formulierung bis jetzt keine Beschränkungen auf die Eigenschaften von $W(\cdot)$ auferlegt, außer daß potentiell *alle* Individuen als Argumente in $W(\cdot)$ enthalten sind. Das ist in dem Sinne eine Einschränkung, weil es Situationen in der gesellschaftlichen Geschichte gab (gibt?), in der bestimmte Gruppen (z.B. u_5, u_6, u_7) keine Rolle bei der Evaluierung der Auswirkungen von Entscheidungen auf die somit definierte, gesellschaftliche Wohlfahrt spielten (spielen).

ality) vorliegt. Jeder individuelle Nutzen u_i bekommt in der Wohlfahrtsfunktion das gleiche Gewicht. Unter dem *Veil of Ignorance* kennt man seine eigene Position in der Gesellschaft ex ante nicht. Nach dem Prinzip des unzureichenden Grundes ist damit jede Position gleichwahrscheinlich. Diese Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{1}{n}$ für jede Position i . Damit erhalten wir eine Formulierung, die der in der Erwartungsnutzentheorie ähnlich ist:

$$W'' = \frac{1}{n}u_1 + \frac{1}{n}u_2 + \frac{1}{n}u_3 + \dots + \frac{1}{n}u_n.$$

Die Formulierungen des Utilitarismus W' und W'' , wobei $W' = nW''$, war vor allem wichtig in den frühen Schriften der Sozialwissenschaften von Bedeutung.

Samuelson (1947), S. 206: "*But to the preceding generation of economists, interindividual comparisons of utility were made almost without question; to a man like Edgeworth, steeped as he was in the Utilitarian tradition, individual utility - nay, social utility - was as real as his morning jam.*"

Beispiel: Edgeworth zur Einkommenssteuer und Verteilung Unter diesen einfachen utilitaristischen Zielen wurde von Edgeworth (1897) das Prinzip des gleichen marginalen Opfers (*equal marginal sacrifice*) abgeleitet. Für eine Betrachtung der optimalen Besteuerung und Umverteilung von Einkommen nehmen wir an, die Steuern hätten keinen Einfluß auf die Einkommen vor Steuern.⁶ Dann kann man Edgeworths Problem so formulieren:

$$\max_{T_i} \sum_i u_i(Y_i - T_i)$$

u. Nb. $\sum_i T_i = R,$

⁶Das ist eine sehr simplifizierende und problematische Annahme, die wir hier nur zur Verdeutlichung des Arguments machen.

wobei R die einzunehmenden Staatseinnahmen darstellt und $N_i \equiv Y_i - T_i$ die Netto-Einkommen darstelle. Die Lagrangefunktion zu diesem Problem lautet

$$L = \sum_i u_i(Y_i - T_i) + \lambda \left[\sum_i T_i - R \right].$$

Die Bedingung erster Ordnung für die Wahl von T_i verlangt

$$MU_i(N_i) = \lambda, \forall i$$

d.h. das Steueropfer sollte für alle Individuen marginal gleich sein.

Wenn der Staat ein Umverteilungsprogramm betrachtet, dann $R = 0$, so daß die Netto-Einkommen sich zur Summe der Brutto-Einkommen summieren müssen. Wenn die Nutzenfunktionen aller Individuen *identisch* sind, dann folgt $MU_i(N_i) = MU(N_i)$, so daß die Einkommen nach Steuern im Optimum für alle Individuen *gleich* sein sollten.

Das war eine radikale Schlußfolgerung, die das viktorianische England schockte.

1.4.1 Einwände gegen den Utilitarismus

Lionel Robbins kritisiert die interpersonelle Nutzenvergleichbarkeit. Diese Kritik ist mit den Überlegungen der ordinalen Nutzentheorie vergleichbar. Das Problem des kardinalen Nutzens und der interpersonellen Nutzenvergleichbarkeit kann an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

Das Brahmin Beispiel Ein Engländer erklärt einem indischen Brahmin den Utilitarismus. Der Brahmin antwortet, daß er das nicht verstehe. Er sei ja immer um ein Zehnfaches glücklicher als ein Unberührbarer.

Das Argument bedeutet vor allem, daß man identische Nutzenfunktionen nicht ökonomisch oder wissenschaftlich ableiten kann. Die Annahme identischer Nutzenfunktionen ist nach Robbins (1938) ein Werturteil.

Amartya K. Sen kritisiert die Verteilung der Nutzensumme in der Wohlfahrtsfunktion. Eine Gleichverteilung scheint problematisch.⁷

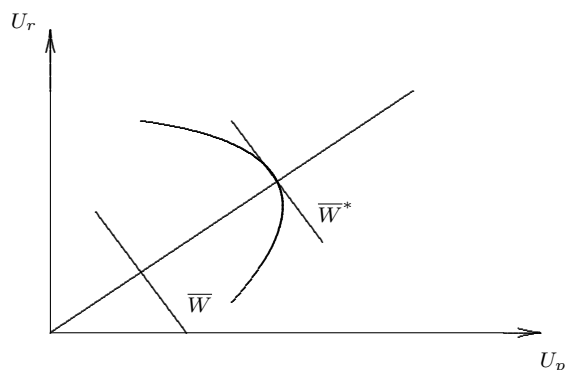
⁷Siehe Sen (1970) und Sen (1977).

Eine wichtige Frage ist, ob der Utilitarismus immer egalitäre Zustände impliziert. Die Antwort ist Nein. Das Edgeworth-Beispiel hängt vom ökonomischen Modell ab. Das Edgeworth-Beispiel steht für ein sogenanntes *cake-sharing model*. Es vernachlässigt z.B. das Problem der Kosten für die Umverteilung. Ferner wirkt Umverteilung auf Verhalten der Individuen z.B. beim Arbeitsangebot und damit auf die Einkommen vor Steuern.

There is nothing especially egalitarian about utilitarianism.

Das *Cake-Sharing*-Modell beinhaltet, daß ein Transfer von 1 Euro von einem Reichen an einen Armen nur durch die Größe des "Kuchens" beschränkt ist. Wenn $U_i(N_i) = U(N_i)$ und identische Nutzenfunktionen vorliegen, dann ist das Verteilungsproblem vollkommen symmetrisch.

Abbildung 3: Utilitarismus mit Symmetrie



Die Nutzenmöglichkeitskurve ist dann symmetrisch und hat die Steigung -1 in dem Punkt, in dem $N_R = N_P$. Wenn $W = U_R + U_P$, dann sind die sozialen Indifferenzkurven Geraden an der 45° Linie und das höchste Nutzenniveau liegt auf der 45° -Linie im Punkt $N_R = N_P$.

Dies ist ein sehr spezieller Fall, denn eigentlich ist das Problem nicht symmetrisch. Redistribution wirkt auf das Verhalten der Reichen. Dann sind die sozialen Indifferenzkurven aber nicht symmetrisch, und dies impliziert ein nicht-egalitäres Resultat.

1.4.2 Alternativen zum Utilitarismus

Wir haben gesehen, daß bei Gleichverteilung ($\frac{1}{n}$) der Nutzenindizes die sozialen Indifferenzkurven Geraden sind. Wenn man sich um die Verteilung der Nutzenindizes Gedanken macht, kann man auch soziale Indifferenzkurven betrachten, die strikt konvex zum Ursprung sind. Dafür muss die soziale Wohlfahrtsfunktion quasi-konkav in den individuellen Nutzendindizes sein.

Folgende Formulierung ist ein Beispiel dafür

$$W = \sum_i [u_i^{1-\epsilon} - 1] / (1 - \epsilon). \quad (1)$$

Diese Funktion entspricht der einfachen utilitaristischen Wohlfahrtsfunktion, wenn $\epsilon = 0$, und ist strikt konvex, wenn $\epsilon > 0$

Ein höheres ϵ kann mit der Zunahme der Risikoaversion identifiziert werden. Nach Harsanyi kann argumentiert werden, daß Menschen in der Ausgangsposition, d.h. ex ante risiko-avers sein könnten. Dies würde in der Wohlfahrtsfunktion in (1) berücksichtigt.

Ein besonderer Fall ist gegeben, wenn die Leute extrem risiko-avers sind. Man kann zeigen, daß

$$W = \min_i \{u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n\} \quad \text{wenn } \epsilon \rightarrow \infty.$$

Dann würde bei extremer Risikoaversion nur das Individuum mit dem geringsten Nutzen eine Rolle spielen.

1.5 Das Rawl'sche Gerechtigkeitskriterium

Rawls (1971) argumentiert, daß in der Ausgangsposition die Individuen extrem risiko-avers sind. Dies führt zu der sogenannten Maxi-Min-Regel.

Maxi-Min Regel Suche das Resultat, das für das schlechtest gestellte Individuum am besten ist.

Nach Rawls gelten zwei Prinzipien für die Evaluierung von Gesellschafts-

zuständen.⁸

Prinzipien nach Rawls

1. Maximale Freiheit
2. Maxi-Min Regel

Es ist anzumerken, daß die Maxi-Min Regel nicht unbedingt zu egalitären Ergebnissen führt.⁹ Tatsächlich kann eine Rawls'sche Verteilungspolitik zu großer Ungleichheit in der gesamten Verteilung von z.B. Einkommen führen.

Ferner muß beachtet werden, daß die Rawls'sche Maxi-Min Regel Pareto-Effizienz respektiert.

1.6 Egalitarismus

Fast alle egalitären Lösungen sind mit Pareto-Ineffizienz. Diese Ansätze gehen im allgemeinen von Zuständen aus, in denen bestimmte Größen gleich sein sollen. Drei Beispiele dafür sind

1. $U_i = U_j, \forall i, j$: Nutzenegalitär
2. $Y_i = Y_j, \forall i, j$: Vor-Steuer-Einkommensegalitär
3. $N_i = N_j, \forall i, j$: Nach-Steuer-Einkommensegalitär

Ein anderes Konzept, das mit dem Egalitarismus verbunden ist, ist das der Distanz in Zuständen. Nach dieser Vorstellung sollten z.B. die Einkommen in einer Gesellschaft nicht zu weit auseinanderklaffen.¹⁰ Eine mögliche

⁸Dies ist eine verkürzte Darstellung des Rawls'schen Werks und gibt den philosophischen Diskurs unzureichend wieder, der sich mit seinem Werk verbindet. Ferner gebrauchen Philosophen und Ökonomen andere Argumente. Rawls als Philosoph sieht seine Gedanken natürlich nicht als eine Reduktion auf den Fall $\epsilon \rightarrow \infty$. Wir beschränken uns hier jedoch auf die Rezeption seines Werkes in der Ökonomie.

⁹Es wird oft behauptet, das Rawl'sche Gerechtigkeitkriterium führe zu Gleichheit. Dieses Argument ist aber durch eine Reihe von Beispielen widerlegt.

¹⁰Diese Vorstellung findet sich z.B. schon bei Platon (428/7 v. Chr. - 348/7 v. Chr.) in den *Nomoi* (Die Gesetze). In Buch V.2 finden wir z.B.:

"Denn das Übermaß in diesem allen [d.h. Geld und Vieh, d. V.] schafft in

Formulierung einer Wohlfahrtsfunktion, die dieses Konzept formalisiert geht - ironischerweise - auf Nozick¹¹ zurück und lautet

$$W = U_P - \theta[U_R - U_P] \quad \text{wobei} \quad U_R > U_P, \theta > 0.$$

Bei dieser Wohlfahrtsfunktion reduziert eine höhere Spreizung der Einkommen zwischen Reich und Arm die Wohlfahrt. Je größer der Abstand ist, desto geringer die Wohlfahrt W . Wenn $\theta \rightarrow \infty$ würden die Abstände in den Nutzenindices vollkommen "bestraft" und eine vollkommen egalitäre Lösung wäre optimal.

2 Die Messung ökonomischer Ungleichheit

Bis jetzt haben wir uns auf die Diskussion von Gerechtigkeitstheorien auf abstraktem Niveau konzentriert. In diesem Abschnitt sollen die Theorien praktisch angewandt werden. Dazu stellen wir uns zunächst folgende Frage: Welche Auswirkungen hat der Staat auf die Einkommen?

den Staaten und bei den einzelnen Zerwürfnisse und Feindschaften, der Mangel dagegen sklavische Abhängigkeit. Auch strebe nicht etwa jemand seiner Kinder wegen nach Schätzen, um diese in höchstem Reichtum zu hinterlassen, denn das ist weder besser für sie noch für den Staat. ... Seinen Kindern aber ziemt es sich in Fülle sittliche Scheu, nicht Gold zu hinterlassen."

Zur Begrenzung des Reichtums finden wir in Buch V.13:

"In einem Staat, behaupten wir, der von der größten Krankheit, welche wir richtiger Auflösung als Aufruhr nennen, frei bleiben will, darf sich weder bei einigen Bürgern drückende Armut noch dagegen auch Reichtum finden, da beide jene erzeugen; der Gesetzgeber muß daher jetzt eine Begrenzung jedes dieser beiden bezeichnen. ... Indem der Gesetzgeber dieses als Maßstab annimmt, wird er das Doppelte, Dreifache, ja Vierfache davon zu besitzen gestatten; erlangt aber einer mehr als das, ... der dürfte wohl, wenn er an den Staat und die über ihn waltenden Götter es abgibt, einen guten Ruf erlangen und keiner Strafe unterliegen; ist dagegen jemand ungehorsam gegen dieses Gesetz, dann möge, wer da Lust hat, gegen die Hälfte der Summe ihn anzeigen, der Schuldige aber entrichte noch ebensoviel von der eigenen Habe, und die Hälfte gehöre den Göttern."

Die Zitate entstammen "Platon: *Nomoi*", in der Übersetzung von H. Müller, in *Platon: Sämtliche Werke* 6, Hrsg. W. F. Otto, E. Grassi und G. Plambröck, Rowohlt, Hamburg, 1982.

¹¹Siehe Nozick (1974), S.410/411.

Annahme: Das Einkommen vor Steuern ist unabhängig von Politik.

Diese Annahme ist sehr problematisch.

Wenn man alle Steuer- und Transferzahlungen zusammenaddiert, führen diese zu einer Reduktion der Einkommensungleichheit.

In Bezug auf staatliche Umverteilung sind folgende Positionen von Belang

2.1 Bezug zu Nozick

Eine Betrachtung der Einkommensverteilung vor und nach Steuern ist nicht von Belang. Nur der Prozeß, aber nicht das Resultat zählt nach Nozick.

2.2 Einstimmigkeit und Pareto-Effizienz

Wenn Einstimmigkeit und Pareto-Effizienz gefordert wird, sind Resultate (*Outcomes*) von Belang. Wir nehmen jetzt einfachheitshalber an, daß nur die Einkommen der Individuen für die Evaluierung des sozialen Zustands eine Rolle spielt. Wir abstrahieren daher davon, daß Individuen ein gleiches Einkommen unterschiedlich bewerten könnten. Damit $u_i = y_i$. Dazu schauen wir uns folgendes Beispiel an:

Tabelle 1: Beispiel: Paretoverbesserung

| Individuum | EK vor Steuern | EK nach Steuern |
|------------|----------------|-----------------|
| A | 2 | 2 |
| B | 4 | 4 |
| C | 5 | 6 |
| D | 6 | 8 |
| E | 8 | 16 |

In diesem Beispiel stellen sich C, D, und E im Einkommen nach Steuern besser. Dafür benutzen wir folgende

Annahme 1 (Pareto-Effizienz) Die Wohlfahrtsfunktion $W(y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$ ist nicht fallend in den individuellen Einkommen

y_i , d.h. $\frac{\partial W}{\partial y_i} \geq 0$.

In dem Beispiel verdoppelt sich das Verhältnis von Top- zu Bottom-Einkommen. Damit ist der Abstand zwischen Reich und Arm größer. Wenn ein Abstandsmaß genommen wird, würde u. U. mehr Ungleichheit festgestellt. Ein Maß für den Abstand in den Einkommen relativ zum Durchschnittseinkommen ist eine Form des *Relative Range*, der folgendermaßen definiert ist

$$\text{Relative Range} = \frac{\text{Top-Einkommen} - \text{Bottom-Einkommen}}{\text{Durchschnittseinkommen}}.$$

Die Meinungen zu dieser Ungleichheitsmaßzahl sind verschieden. Der *Relative Range* wird oft als zu grobe Maßzahl gesehen, enthält aber durchaus wertvolle Informationen über die Extremeinkommen.¹²

2.3 Wohlfahrtsfunktion und Stochastische Dominanz

Die Annahme 1 mit $\frac{\partial W}{\partial y_i} \geq 0$ ist äquivalent zur Forderung, daß Pareto-Effizienz gelten soll. Folgende Einschränkung der Wohlfahrtsfunktion erlaubt weitere Analysen.

Annahme 2 (Symmetrie) Die Wohlfahrtsfunktion W ist symmetrisch in den individuellen Einkommen y_i , d.h.

$$W(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_l, \dots, y_n) = W(y_1, y_2, \dots, y_l, \dots, y_i, \dots, y_n).$$

Diese Annahme besagt, daß alle Individuen gleichgestellt werden. Es ist in dem Sinne eine Anonymisierungsannahme, nach der keine Attribute der Individuen außer ihrem Einkommen zählen.

Was das Zusammenspiel von Annahme 1 und 2 ergibt, verdeutlicht folgendes Beispiel:

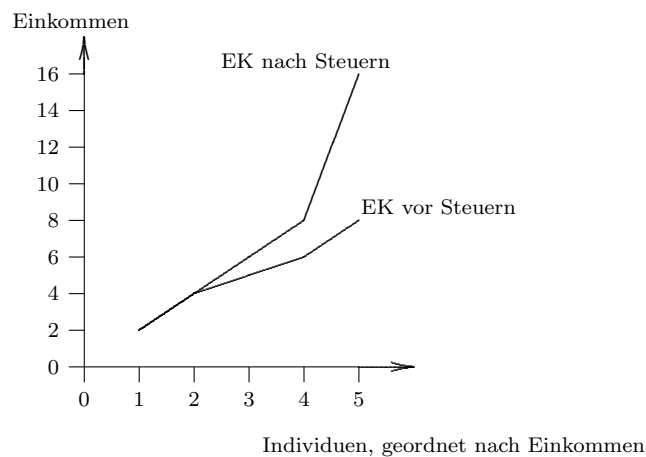
¹²Siehe Tabelle 9 und 10 für die Definition des *Range*.

Tabelle 2: Beispiel: W ist steigend und symmetrisch in y_i

| Individuum | EK vor Steuern | EK nach Steuern | <i>Reranked</i> |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|
| A | 2 | 2 | 2 |
| B | 4 | 6 | 4 |
| C | 5 | 4 | 6 |
| D | 6 | 8 | 8 |
| E | 8 | 16 | 16 |

Der Übergang von der Verteilung der Einkommen vor Steuern zu der nach Steuern erfüllt Pareto-Effizienz nicht. Wenn aber Symmetrie (Anonymität) angenommen wird, kann die Verteilung der Einkommen nach Steuern neu geordnet (*rerank*) werden, die dann superior zur Ausgangsverteilung der Einkommen vor Steuern ist. Der Rerank hat dabei die soziale Wohlfahrt der Verteilung der Einkommen nach Steuern nicht beeinträchtigt.

Abbildung 4: Einkommen vor und nach Steuern mit Ranking



2.3.1 *Pen's Parade*

Warum ist die neugeordnete Verteilung superior? Eine Sichtweise, sich Einkommensverteilungen als Ordnungen vorzustellen, geht auf eine Idee von Pen

zurück. Wir stellen uns vor, daß eine Stunde lang die ganze U.S. Einkommensverteilung in einer Parade vor uns vorbeiläuft. Die Größe der Vorbeimarschierenden sei gleich ihrem Einkommen gesetzt. Für das Durchschnittseinkommen setzen wir eine Größe von 180 cm fest. Die Dauer der Parade wird auf 60 Min. begrenzt. Nach Pen (1973) würden wir dann folgendes für die Einkommensverteilung der USA in den 60/70er Jahren beobachten:

1. Zuerst zögen Leute vorbei, die kopfüber marschieren würden. (Manche Leute haben negative Einkommen.)
2. Dann kommen sehr kleine Leute, fast Zwerge. Nach einiger Zeit kommen die Rentner mit einer Größe von 40 cm.
3. Die Schlechtbezahlten marschieren vorbei mit einer Größe von ca. 100 cm.
4. Dann kommt lange keine Variation in der Größe.
5. In den letzten 6 Min. kommen dann Leute mit 200 cm. Dann Ärzte mit 10m. Dann Top Manager (*company chairmen*) mit 100 m.
6. Als letzter kommt in dieser Zeit (60/70er Jahre) J. P. Getty mit einem Einkommen, das 15 km entspricht.

2.3.2 Personelle Einkommensverteilungen

Um zu sehen, was diese Ordnungen von Verteilungen von Einkommen vor und nach Steuern für unser Beispiel bedeutet, betrachten wir Abbildung (4).

Resultat 1 (Ranking) $Y^*(F)$ bezeichne das gerankte Einkommen nach Steuern und $Y(F)$ bezeichne die Verteilung vor Steuern, wobei $0 \leq F \leq 1$ den Rang in der Verteilung wiedergibt. Dann $Y^*(F) \geq Y(F)$, d.h. das Einkommen ist für gerankte Individuen höher (nicht niedriger) in $Y^*(F)$ als in $Y(F)$.

Wenn wir die Inverse von gerankten Verteilungen bilden, erhalten wir die Standarddarstellung von personellen Einkommensverteilungen.

Definition 1 (Einkommensverteilungsfunktion) $F(Y)$ bezeichnet den Anteil der Bevölkerung mit einem Einkommen, das nicht größer als Y ist.

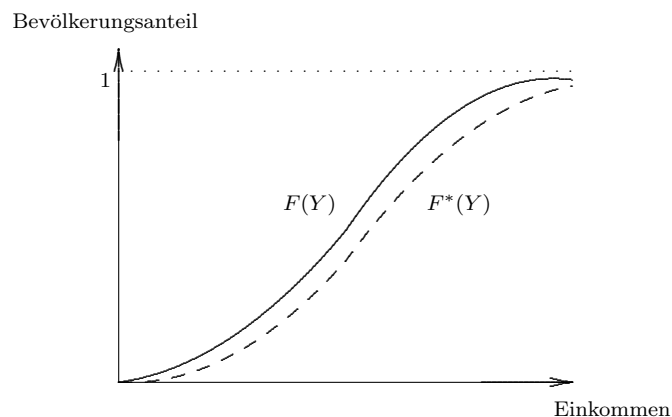
In diesem Sinne entspricht die Einkommensverteilungsfunktion dem statistischen Konzept einer (kumulativen) Verteilungsfunktion.

Um Verteilungen hinsichtlich eines bestimmten Konzepts zu ordnen führen wir die partielle Ordnung \succ hinsichtlich eines Vergleichsprinzips T ein und definieren das Konzept der

Definition 2 (Dominanz) Wenn $F \succ_T G$, dann dominiert die Verteilung F die Verteilung G hinsichtlich des Vergleichsprinzips T .

Definition 3 (First Order Stochastic Dominance (FOSD)) Wenn für jedes Einkommen Y gilt, daß $F^*(Y) \leq F(Y)$, dann dominiert die Verteilung $F^*(Y)$ die Verteilung $F(Y)$ in Sinne stochastischer Dominanz erster Ordnung, d.h. $F^*(Y) \succ_{FOSD} F(Y)$.

Abbildung 5: Einkommensverteilungsfunktion



Das stochastische Dominanzkriterium erster Ordnung für Vergleiche von Einkommensverteilungen besagt intuitiv folgendes: Die Verteilung, bei der die Anzahl der Leute, die Einkommen Y haben, kleiner ist, scheint "gerechter" zu sein, weil dann letztlich die verbleibenden Leute in dieser Verteilung ein höheres Einkommen haben müssen.

Wenn die soziale Wohlfahrtsfunktion (SWF) symmetrisch ist, dann kann man mehr Vergleiche anstellen als wenn nur Einstimmigkeit (Pareto) gefordert wird.

Bei Pareto-Effizienz muß jeder besser dran sein. Bei Symmetrie verlangen wir nur, daß eine Person in einer bestimmten Position in der Verteilung besser dran ist als eine Person in einer vergleichbaren Position vor der Steuererhebung.

Theorem 1 *Wenn $F^*(Y) \leq F(Y)$ für alle Y und damit $F^*(Y) \succ_{FOSD} F(Y)$, dann wird die Einkommensverteilung $F^*(Y)$ (schwach) präferiert von allen SWF, die nicht-fallend und symmetrisch sind.*

2.4 SWF und Gleichheitspräferenz

Bis jetzt haben wir nur zwei Restriktionen auf die soziale Wohlfahrtsfunktion gesetzt. Wir haben angenommen, sie sei nicht-fallend und symmetrisch in individuellen Einkommen. Dabei ist anzumerken, daß diese Eigenschaften auch von der Rawl'schen SWF erfüllt werden.

Eine andere Frage betrifft die Einstellung zu einer Gleichheit der Einkommen.

Resultat 2 (Dalton Transfer Prinzip) *Wenn $F^*(Y)$ durch eine Reihe egalisierender Transfers (equalizing transfers) von $F(Y)$ aus erreicht werden kann, dann wird $F^*(Y)$ von allen SWF präferiert, die nicht-fallend und gleichheitspräferierend (equity-preferring) sind.*

Tabelle 3: Beispiel: Dalton Transfer Prinzip

| Individuum | EK vor Steuern | EK nach Steuern |
|------------|----------------|-----------------|
| A | 2 | 3 |
| B | 4 | 5 |
| C | 5 | 5 |
| D | 6 | 5 |
| E | 8 | 7 |
| Σ | 25 | 25 |

Für die Erfüllung des Dalton Prinzips braucht man eine Sequenz von *Mean Preserving, Equalizing Transfers*. In dem Beispiel bräuchte man zwei Transfers, einen von E nach A und einen von D nach B, wobei das Durchschnittseinkommen konstant bleibt.

Definition 4 (Lorenz Kurve (LC)) Die Lorenz-Kurve setzt den Anteil an der Gesamtbevölkerung (X -Achse) in Beziehung zu dem Anteil am Gesamteinkommen (Y -Achse).

Definition 5 (Lorenz Dominanz) Lorenz Dominanz liegt vor, wenn die Lorenz-Kurve für die Verteilung $F^*(Y)$ in jedem Punkt des Anteils an der Gesamtbevölkerung (X -Achse) über der Lorenz-Kurve für die Verteilung $F(Y)$ und damit näher an der 45° Linie liegt: $F^*(Y) \succ_{LC} F(Y)$.

Tabelle 4: Beispiel: Lorenz Dominanz

| Individuum | EK vor Steuern | EK nach Steuern |
|------------|----------------|-----------------|
| A | 2 | 3 |
| B | 4 | 5 |
| C | 5 | 5 |
| D | 6 | 5 |
| E | 8 | 77 |
| Σ | 25 | 25 |

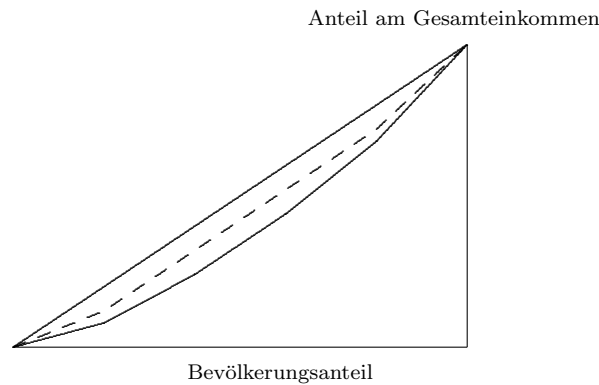
Tabelle 5: Beispiel: Lorenz Kurve I (vor Steuern)

| Anteil der Bevölkerung | Anteil am Gesamteinkommen |
|------------------------|---------------------------|
| 0.20 | $\frac{2}{25} = 0.08$ |
| 0.40 | $\frac{6}{25} = 0.24$ |
| 0.60 | $\frac{11}{25} = 0.44$ |
| 0.80 | $\frac{17}{25} = 0.68$ |

Tabelle 6: Beispiel: Lorenz Kurve II (nach Steuern)

| Anteil der Bevölkerung | Anteil am Gesamteinkommen |
|------------------------|---------------------------|
| 0.20 | $\frac{3}{25} = 0.12$ |
| 0.40 | $\frac{8}{25} = 0.32$ |
| 0.60 | $\frac{13}{25} = 0.52$ |
| 0.80 | $\frac{18}{25} = 0.72$ |

Abbildung 6: Lorenz Kurve I und II



Theorem 2 (Atkinson (1970)) Wenn $F(Y)$ und $F(Y^*)$ das gleiche Durchschnittseinkommen haben und die Lorenz-Kurve für Y^* überall über und nicht unter der Lorenz-Kurve für Y liegt, d.h. $F^* \succ_{LC} F$, dann wird sie von allen SWF präferiert, die nicht-fallend, symmetrisch und konkav sind.

Bei der Beurteilung von Verteilungen können dabei zwei Probleme auftreten:

1. Die Lorenz Kurven schneiden sich.
2. Die Verteilungen haben verschiedene Durchschnittseinkommen.

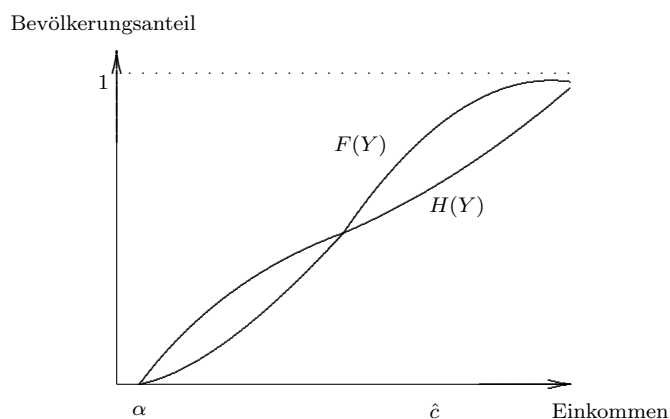
Definition 6 (Second Order Stochastic Dominance (SOSD)) Wenn für alle c gilt, daß

$$\int_{-\infty}^c F(r)dr \leq \int_{-\infty}^c H(r)dr$$

und die Ungleichung strikt ist in einem Teil des Intervalls $r \in (-\infty, c]$, dann besitzt die Verteilung F stochastische Dominanz zweiter Ordnung über die Verteilung H .

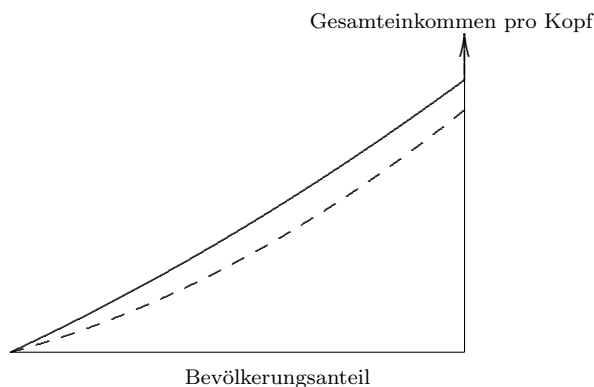
Geometrisch besagt das Konzept folgendes: Die Verteilung F dominiert die Verteilung H in Sinne von SOSD, wenn in einem Intervall $[\alpha, c]$, die Fläche unter F niemals größer (und manchmal kleiner) ist als die entsprechende Fläche unter H .

Abbildung 7: *Second Order Stochastic Dominance*



Definition 7 (Generalisierte Lorenz Kurve (GLC)) Wenn die Y-Achse der Lorenz Kurve mit dem Durchschnittseinkommen multipliziert wird, erhalten wir die Generalisierte Lorenz Kurve.

Abbildung 8: Generalisierte Lorenz Kurve



Bei der GLC ist die Y-Achse in Währungseinheiten, nicht in Prozent, d.h. auf der Y-Achse steht jetzt $\frac{\sum_i y_i}{n}$ statt $\frac{1}{n} \frac{\sum_i y_i}{\bar{y}}$.

Resultat 3 *GLC Dominanz* \Leftrightarrow *SOSD*.

Theorem 3 (Shorrocks (1983)) Wenn und nur wenn die Generalisierte Lorenz Kurve (GLC) für Y^* über (nicht unter) der für Y liegt, d.h. $F^* \succ_{GLC} F$, dann wird F^* (schwach) präferiert von allen SWF, die nicht-fallend, symmetrisch und konkav sind.

Es ist mit den GLCs möglich zu sagen, daß Y^* vorzuziehen ist, wenn die normale LC für Y^* die LC von Y schneidet. Aber es ist auch möglich, daß $F(Y) \succ_{LC} F^*(Y)$, aber $F^* \succ_{GLC} F$.

Tabelle 7: Beispiel: \succ_{LC} vs. \succ_{GLC}

| Individuum | Y_1 | Y_2 | Y_3 |
|------------|-------|-------|-------|
| A | 2 | 3 | 1 |
| B | 4 | 5 | 1 |
| C | 5 | 5 | 1 |
| D | 6 | 5 | 1 |
| E | 8 | 7 | 1 |
| Σ | 25 | 25 | 5 |

Die bisherigen Ergebnisse können wir so zusammenfassen:

1. SWF nicht-fallend und symmetrisch \Leftrightarrow FOSD.
2. SWF nicht-fallend, symmetrisch und konkav \Leftrightarrow SOSD.
3. SWF nicht-fallend, symmetrisch und konkav \Leftrightarrow LC Dominanz für Verteilungen mit gleichem Durchschnittseinkommen (Atkinson (1970)).
4. SWF nicht-fallend, symmetrisch und konkav \Leftrightarrow GLC Dominanz (Shorrocks (1983)).

2.4.1 Kreuzende Lorenz-Kurven

Wenn sich Lorenz Kurven schneiden, können wir uns fragen, ob weitere Einschränkungen der SWF wünschenswert sind. Beispielsweise könnte man aufbauend auf Dalton verlangen, daß egalisierende Transfers bei niedrigeren Einkommen wünschenswerter sind als bei hohen Einkommen.

Definition 8 (*Principle of Diminishing Transfers*) *A good transfer at the bottom can offset an equally-sized bad transfer at the top.*

Wenn wir also eine transfer-sensitive SWF betrachten, sollte die Wohlfahrt steigen, wenn durch eine Kombination eines egalisierenden Transfers am unteren Ende der Verteilung und eines vergleichbaren disegalisierenden Transfers bei oberen Einkommen kompensiert wird.

Welche Form für W erfüllt dieses Prinzip? Wir nehmen zunächst an, W sei additiv

$$W = u(y_1) + \dots + u(y_n).$$

Diese Form muß nicht unbedingt utilitaristisch sein, wenn z.B. $u(\cdot)$ nicht den Nutzenindex der Individuen widerspiegelt, sondern z.B. die Vorstellungen eines Planers über die Nutzen der Individuen darstellt.

Theorem 4 *Wenn Y und Y^* den gleichen Mittelwert haben und wenn $F^*(Y) \succ_{LC} F(Y)$ oder $LC(Y^*)$ beginnt über $LC(Y)$ und die LCs schnei-*

den sich nur einmal, und wenn $\text{var}(Y^*) < \text{var}(Y)$, dann wird F^* präferiert von allen transfer-sensitiven SWF.

Dieses Theorem kann in der Praxis ganz nützlich sein.

3 Maßzahlen

Um eine gesamte Evaluation von Einkommensverteilungen zu bekommen, müsste man die SWFs immer mehr spezifizieren (einschränken). Eine Maßzahl hat in diesem Kontext den Vorteil, daß sie die Reduktion der sozialen Wohlfahrt auf einen Punkt impliziert. Wir bekommen durch eine Maßzahl ein komplettes Ranking von Verteilungen und erhalten damit auch ein Maß für den Abstand von zwei Verteilungen.

3.1 SWF-Basierte Maßzahlen

Beispielsweise ist der oft verwendete Gini Koeffizient nicht aus SWF-Erwägungen direkt abgeleitet. Er ist ein ad hoc Maß, das aber in der Praxis sehr oft gebraucht wird. Ein Vorteil des Gini Koeffizienten liegt darin, daß er oft Probleme löst, wenn Lorenz Kurven sich schneiden. Dabei ist der Vergleich von Gini-Werten eigentlich ein Werturteil und komprimiert die soziale Wohlfahrt auf zwei Punkte. Allerdings ist hierbei nicht klar, was der Gini Index eigentlich an Informationen über soziale Wohlfahrt enthält. Da der Gini Koeffizient nur eine Zahl angibt, erlaubt er keine verschiedenen Meinungen zur sozialen Wohlfahrt.

Wir schauen uns nun, ein Beispiel für einen Ungleichheitsindex an, der explizit aus einer SWF abgeleitet wird.

3.1.1 Der Atkinson Index

Eine Alternative zu eindimensionalen Ungleichheitsindices geht auf Atkinson (1970) zurück, welche aus Wohlfahrtsüberlegungen, d.h. konkret aus einer SWF, abgeleitet wird. In diesem Index werden unterschiedliche Meinungen zur sozialen Wohlfahrt durch einen Parameter $\epsilon \geq 0$ erfasst.

Der Atkinson-Index entspricht

$$A_\epsilon = \begin{cases} 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right)^{1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}, & \text{wenn } \epsilon \neq 1 \\ 1 - \frac{1}{n} \prod_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right), & \text{wenn } \epsilon = 1. \end{cases}$$

Wenn $\epsilon = 0$, dann wird kein Gewicht auf Ungleichheit gelegt. Wenn $\epsilon \rightarrow \infty$, dann ist die zugrundeliegende SWF Rawlsianisch und es herrscht extreme Ungleichheitsaversion.

Wenn wir nun einen Wert von $A_\epsilon = 0.4$ erhalten, handelt es sich um eine bedingte Aussage, weil wir wissen müssen, welchen Wert ϵ (z.B. $\epsilon = 0.5, 1, 2, \dots$) annimmt. Dabei stellt sich die Frage, wie ϵ zu interpretieren ist.

Das *Leaky Bucket Experiment* Okun (1975) schlägt folgende Überlegung zur Bestimmung des Parameters ϵ bei Messung von Ungleichheitsaversion vor: Angenommen wir nehmen 1 Euro von jemandem mit 45.000 Euro und geben $(1 - l)$ Euro einer Person mit 5.000 Euro. Dabei bezeichne l das Leck (*leackage*) das bei der Übertragung entstehe. Ein Grund dafür kann z.B. durch Administrationskosten entstehen, die auch als *excess burden of taxation* bezeichnet werden. Frage: Welchen Wert sollen wir akzeptieren, so daß der Transfer für uns noch einen Sinn macht?

Wir können diese Frage mittels Kalibrierung beantworten. Der Reiche gibt 1 Euro ab, und der Arme bekommt $(1 - l)$ Euro als Transfer. Enthalten im Atkinson Index A_ϵ ist die Wohlfahrtsfunktion

$$W = \sum_i [y_i^{1-\epsilon} - 1] / (1 - \epsilon).$$

Die soziale, marginale Bewertung eines zusätzlichen Euro entspricht

$$\frac{\partial W}{\partial y_i} = y_i^{-\epsilon}$$

Die Bedingung für einen Transfer von Reich zu Arm lautet dann

$$(1 - l)y_p^{-\epsilon} > y_r^{-\epsilon}$$
$$(1 - l) > \left(\frac{y_p}{y_r}\right)^\epsilon$$

Im Optimum wird so lange transferiert bis die linke Seite der rechten Seite entspricht. Okun meint, daß ein "Leck" von 60% tolerabel ist. Für $l = 0.6$, $y_r = 45000$ und $y_p = 5000$ erhalten wir

$$\epsilon \ln(1/9) = \ln(2/5)$$
$$\epsilon = 0.42.$$

Dieser Wert von ϵ ist wenig egalitär. Oft werden Werte von 1 oder sogar 2 für ϵ angegeben. Sind solche Werte von "Radikalen" gewählt?

Okuns Beispiel hängt sehr von den getroffenen Annahmen ab. Nehmen wir an, wir schauten uns Individuen an, deren Einkommen sich um den Faktor 2 unterschieden: $y_p = \frac{1}{2} y_r$. Dann erhielten wir folgende Ergebnisse für die Kalibrierung:

Tabelle 8: Kalibrierung für $y_p = \frac{1}{2} y_r$

| l | ϵ |
|------|------------|
| 0.10 | 0.15 |
| 0.25 | 0.42 |
| 0.50 | 1.00 |
| 0.60 | 1.32 |
| 0.75 | 2.00 |

Wir sehen, daß nun höhere Werte für ϵ mit dem gleichen Leck verbunden sind. Insgesamt ist der Zweck des Parameters ϵ zu verdeutlichen, daß wir Werturteile fällen müssen, wenn Ungleichheit zu bewerten ist. Der Sinn der Kalibrierung ist es herauszufinden, wie wohl aus beobachteten Zusammenhängen die impliziten Werturteile sind. Natürlich können sich Individuen

stark in diesen unterscheiden und damit sehr unterschiedliche ϵ ansetzen. In der Praxis werden deshalb meistens die Werte $\epsilon = 0.5, 1, 1.5$ oder auch 2 angegeben, um zu dokumentieren, wie Individuen oder die Gesellschaft mit verschiedener Ungleichheitsaversion die vorliegende Verteilung beurteilen würden.

3.2 Ad Hoc Maßzahlen

Einige Ungleichheitsmaße sind nicht explizit aus einer SWF abgeleitet, haben aber intuitive Vorteile. In der Literatur spielen diese ad hoc Maßzahlen eine große Rolle, weil sie manchmal bestimmte positive Eigenschaften wie z.B. Einfachheit haben. In der Literatur wurden diese ad hoc Maßzahlen allerdings auf ihre Wohlfahrtseigenschaften hin untersucht, so daß man für die meisten dieser Maße diese Eigenschaften mittlerweile kennt. Im Prinzip geht man also von den ad hoc Maßen aus und sucht dann die dazugehörige SWF.¹³ Wir betrachten nun drei gängige ad hoc Maße.

Der *Equal Shares Coefficient* ist definiert als $F(\bar{y})$ und gibt an, wie hoch der Bevölkerungsanteil ist, der weniger und höchstens das Durchschnittseinkommen \bar{y} bezieht.

Der *Minimal Majority Coefficient* ist definiert als $F(y_o)$ und gibt an, wie hoch der Bevölkerungsanteil ist, wenn die Hälfte des Gesamteinkommens y_o verteilt wurde.

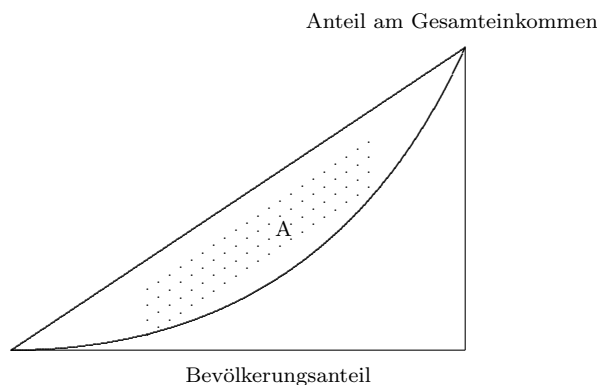
Beide Maßzahlen haben unerwünschte Eigenschaften bezüglich der Transfersensitivität.¹⁴

Wahrscheinlich die berühmteste ad hoc Maßzahl ist der *Gini-Koeffizient*. Er gibt an, wie weit die Lorenz-Kurve vom Zustand vollkommener Gleichheit entfernt ist. Dies erkennen wir aus der Abbildung (9). Die Gerade gibt den Zustand vollkommener Gleichheit wieder. Die Lorenz Kurve gibt die beobachtete Ungleichheit wieder. Der Gini-Koeffizient mißt die Differenz der Fläche des Dreiecks zu der Fläche unter der Lorenz-Kurve. Dies entspricht der Fläche A .

¹³Mehr zu diesem Thema findet sich z.B. Lambert (1993).

¹⁴Diese beiden Maßzahlen sind eingehender erklärt in Cowell (1995).

Abbildung 9: Gini Koeffizient



Der Gini-Koeffizient kann Werte zwischen 0 und 1 (bzw. 0% und 100%) annehmen. Je näher der Wert an 1 ist, desto größer ist die Ungleichheit. Bei vollkommener Gleichheit ist der Wert Null.

Der Gini-Koeffizient kann auf zwei Arten algebraisch berechnet werden. Dazu ordnen wir die Einkommen vom niedrigsten (y_1) zu höchsten Einkommen (y_n) wie bei *Pen's Parade*:

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \dots \leq y_n$$

Der Gini-Koeffizient kann dann mit folgender Formel berechnet werden:

$$G = \frac{2}{n^2 \bar{y}} [y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + ny_n] - \frac{n+1}{n}.$$

Die Formel kann so manipuliert werden, daß wir eine andere Form der Berechnung erhalten, die folgendermaßen lautet:

$$G = \frac{1}{2n^2 \bar{y}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|.$$

Dieser Ausdruck verdeutlicht, daß der Gini-Koeffizient den Einkommenabstand (Distanz) zwischen den Einkommensbezieher für die Bestimmung der Ungleichheit mißt.

4 Axiomatik zu Ungleichheitsmaßen

Ungleichheitsmaßzahlen können auch aus Forderungen abgeleitet werden, die für die Messung und Wohlfahrtsevaluation sinnvoll erscheinen. Formuliert in Axiomen zeigt sich, daß diese in der Regel nicht von allen Maßzahlen erfüllt werden und zum Teil in einem gewissen Widerspruch zueinander stehen. Folgende Axiome spielen in der Literatur eine bedeutende Rolle. Siehe Cowell (2000), Kap. 2.3.

Axiom 1 (Anonymity) *Permutationen persönlicher Eigenschaften werden als verteilungsäquivalent betrachtet, d.h.*

$$(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \sim_I (y_2, y_1, y_3, \dots, y_n) \sim_I (y_1, y_3, y_2, \dots, y_n) \dots,$$

wobei \sim_I ein Operator ist, der Äquivalenz hinsichtlich der zu beurteilenden Verteilung darstellt, und y_i die individuellen Einkommen bezeichnet.

Diese Annahme haben wir schon bei der Analyse von SWF kennengelernt. Sie beinhaltet eine starke Abstraktion von den persönlichen Eigenschaften der Individuen.

Axiom 2 (Population Principle) *Replikationen der zu untersuchenden Population sind als verteilungsäquivalent anzusehen.*

$$\begin{aligned} (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) \sim_I (y_1, y_1, y_2, y_2, y_3, y_3 \dots, y_n, y_n) \sim_I \dots \\ \sim_I (\underbrace{y_1, \dots, y_1}_m, \underbrace{y_2, \dots, y_2}_m, \dots, \underbrace{y_n, \dots, y_n}_m) \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Wir definieren den Operator \succ_I , so daß $G \succ_I F$ bedeutet, daß die Verteilung G die Verteilung F im Sinne von Ungleichheit dominiert, d.h. G hat mehr Ungleichheit als Verteilung F .

Axiom 3 (Principle of Transfers) *$G \succ_I F$, wenn die Verteilung G durch eine Reihe von Mean Preserving Spreads von F aus erreicht werden kann,*

d.h. wenn $\delta < y_i \leq y_j$ dann

$$Y_B = (y_1, \dots, y_i - \delta, \dots, y_j + \delta, \dots, y_n) \succ_I (y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_n) = Y_A.$$

$G \succ_W F$ bezeichne Wohfarthsdominanz der Verteilung G gegenüber der Verteilung F .

Axiom 4 (Monotonicity) $G \succ_W F$, wenn die Verteilung G durch eine Rechtstranlation aus der Verteilung F erhalten werden kann.

Eine Rechtstranlation kann verschiedene Formen annehmen und bedeutet, daß mehr Wahrscheinlichkeitsmasse nach rechts verschoben wird. Beispielsweise für $Y_A = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_n)$ gebe es eine Zahl δ , so daß $Y_C = (y_1, \dots, y_i + \delta, \dots, y_n)$, dann fordert das Axiom, daß $Y_C \succ_W Y_A$.

Als nächstes definieren wir folgende Konzepte:

$$F^{(+k)}(y) = F(y - k),$$

d.h. alle Einkommen der Verteilung $F(y)$ werden mit einem Betrag k verschoben.

$$F^{(\times k)} = F\left(\frac{y}{k}\right),$$

d.h. alle Einkommen der Verteilung $F(y)$ werden mit dem Skalarvielfachen von k multipliziert.

Axiom 5 (Scale Invariance) Wenn $G \succ_I F$, dann $G^{(\times k)} \succ_I F^{(\times k)}$.

Nach diesem Axiom, spielt es für die Ungleichheitsbeziehung keine Rolle, wenn alle Einkommen z.B. verdoppelt oder halbiert werden.

Axiom 6 (Decomposability) Es sei $\delta \in [0, 1]$. Wenn $G \succ_I F$, dann folgt $[1 - \delta]G + \delta K \succ_I [1 - \delta]F + \delta K$.

Wenn man die Verteilungen G und F mit einer Verteilung K mischt und alle diese Verteilungen den gleichen Mittelwert haben, sollte die Verteilung K keine Rolle bei dem Ungleichheitsranking von G und F spielen. Dieses

Axiom spielt eine wichtige Rolle, wenn wir uns Sub-Gruppen der Population anschauen. Wenn wir die Ungleichheit der Einkommen von z.B. Hessen, Bayern und Niedersachsen anschauen, spielt nach dem Axiom die Ungleichheit bei den Niedersachsen keine Rolle, wenn wir die Ungleichheit zwischen Hessen und Bayern vergleichen. Nicht alle Ungleichheitsmaße erfüllen diese Bedingung. Beispielsweise erfüllt der Gini-Index diese Bedingung nicht.

Axiom 7 (Uniform Income Growth) $k > 0 \Rightarrow F^{(+k)} \succ_W F$.

Wenn jedes Individuum einen bestimmten, absoluten Betrag (z.B. 100 Euro) zu seinem jetzigen Einkommen dazubekommt, ist die neue Verteilung wohlfahrtssuperior.

Axiom 8 (Translation Invariance) Wenn $G \succ_I F$, dann $G^{(+k)} \succ_I F^{(+k)}$.

Nach diesem Axiom würden absolute Additionen zu dem gegenwärtigen Einkommen, das Ungleichheitsranking nicht beeinflussen.

5 Praxisrelevante Fragestellungen

In der Praxis gibt es viele Vorstellungen zur Ungleichheit. Für die Messung gilt zunächst die Maxime, daß

- konsistent

gemessen werden muss. Die zentrale Frage dafür ist

Inequality of What and for Whom?

Dazu muß festgelegt werden, was zu messen ist: Vermögen, Brutto-Einkommen, Netto-Einkommen, Konsum, Konsumausgaben, etc.

Es muß festgelegt werden, wer betrachtet wird: Personen, Haushalte, Steuereinheiten, etc.

Es muß ferner angegeben werden, wie und wo und wann die Daten erhoben worden sind: Handelt es sich um repräsentative Daten oder nicht, gelten sie für eine Region oder ein ganzes Land, für welches Jahr wurde erhoben,

in welcher Währung sind z.B. die Einkommens- und Vermögensdaten angegeben, etc.

Diese Fragen sind von großer Bedeutung, wenn ein genaues Bild zu einer Ungleichheitsfragestellung ermittelt werden soll.

5.1 Beispiel: Brutto- oder Nettoeinkommen

Anhand eines Beispiels verdeutlichen wir uns nun theoretisch, welche Unterschiede sich ergeben können, wenn zwei verschiedene Einkommensarten, nämlich Brutto- und Netto-Einkommen verglichen werden.

Wir gehen von einer Ökonomie aus, in der das Steuersystem progressiv ist. Die ist der Fall, wenn das Verhältnis der Steuern zum Gesamteinkommen $\frac{T}{Y}$ steigend in Y ist, d.h. wenn

$$\frac{\partial T}{\partial Y} > \frac{T}{Y}$$

und somit der Grenzsteuersatz größer als der Durchschnittssteuersatz ist. Wenn $N = Y - T$ das Netto-Einkommen bezeichnet, folgt, daß $\frac{N}{Y}$ eine fallende Funktion von Y sein muss.

Proposition 1 (Jakobsson (1976)) *Wenn und nur wenn $T(Y)$ überall progressiv ist, dann $LC(N) \succ_{LC} LC(Y)$.*

Damit haben wir Lorenzdominanz für die Netto-Einkommenverteilung und damit einen niedrigeren Gini-Wert.¹⁵

5.2 Beispiel: *Equivalence Scales*

Häufig werden Einkommensdaten für Haushalte angegeben, obwohl man an der Wohlfahrt von Personen interessiert ist. Dabei geht man von der Vorstellung aus, das Einkommen sei ein Indikator für die (potentielle) Wohlfahrt von

¹⁵Das gilt natürlich nur unter der Bedingung, die im Theorem angegeben ist, nämlich daß die Steuertarife überall progressiv sind. In den Daten für die meisten Länder ist das jedoch in der Regel der Fall, d.h. der Wert des Gini-Koeffizienten für die Verteilung der Netto-Einkommen ist niedriger als der Wert für die Verteilung der Brutto-Einkommen.

Individuen. Wenn wir aber Haushaltsdaten erhalten, müssen wir uns z.B. fragen, wie wir das Pro-Kopf-Einkommen eines Haushalts mit zwei Erwachsenen von Euro 20.000 vergleichen mit einem Pro-Kopf-Einkommen eines Haushalts mit zwei Erwachsenen und zwei Kindern von Euro 40.000. Wenn wir den normalen Durchschnitt anschauen, ist das Pro-Kopf-Einkommen für beide Haushalte gleich.

Kinder haben aber in der Regel andere Bedürfnisse und konsumieren weniger als Erwachsene. Ferner sind die Konsumgewohnheiten von Männern anders als von Frauen. Rentner konsumieren anders als Jugendliche etc. Um diesen wohlfahrtsrelevanten Unterschieden Rechnung zu tragen, werden oft Äquivalenzgewichte (*Equivalence Scales*) für die Bestimmung des Pro-Kopf-Einkommens verwendet, nach denen die Mitglieder des Haushalts nach bestimmten Kriterien gewichtet werden. Das so ermittelte Einkommen eines typischen Haushaltsmitglieds wird als Äquivalenzeinkommen bezeichnet.

Nach einer oft verwendeten Formel in der Praxis berechnet man z.B. die Haushaltsgröße als Wurzel, \sqrt{m} , der gesamten Mitglieder, m , des Haushalts. Dahinter steckt u.a. eine *Economies of Scale*-Überlegung. Danach hätten die o.e. Haushalte ein Pro-Kopf-Einkommen von $\frac{20.000}{\sqrt{2}}$ bzw. $\frac{40.000}{\sqrt{4}}$, so daß für das repräsentative Individuum im zweiten Haushalt das Einkommen höher ist.

Es gibt eine Reihe von *Equivalence Scales*, die in der Praxis verwendet werden. Ihr Gebrauch ist aber oft nicht unkontrovers.

Tabelle 9: Inequality Measures for Discrete Distributions

| Name | Definition | (min, max) | Transfer $i \rightarrow j$ |
|--------------------------|---|--|--|
| Variance | $V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [y_i - \bar{y}]^2$ | $(0, \bar{y}^2[n-1])$ | $\frac{2}{n}[y_j - y_i]$ |
| Coefficient of variation | $c = \frac{\sqrt{V}}{\bar{y}}$ | $(0, \sqrt{n-1})$ | $\frac{y_j - y_i}{n\bar{y}\sqrt{V}}$ |
| Range | $R = y_{max} - y_{min}$ | $(0, n\bar{y})$ | 0 unless $\begin{cases} y_i = y_{min}, y_{max} \\ \text{or} \\ y_i = y_{min}, y_{max} \end{cases}$ |
| Relative Mean Deviation | $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left \frac{y_i}{\bar{y}} - 1 \right $ | $\left(0, 2 \left[1 - \frac{1}{n}\right]\right)$ | $\begin{cases} \frac{2}{n\bar{y}} & \text{if } y_i < \bar{y} \leq y_j \\ \frac{2}{n\bar{y}} & \text{if } y_j < \bar{y} \leq y_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$ |
| Logarithmic Variance | $v = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\log \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right) \right]^2$ | $(0, \infty)$ | $\frac{2}{n} \left[\frac{1}{y_j} \log \left(\frac{y_j}{\bar{y}} \right) - \frac{1}{y_i} \log \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right) \right]$ |
| Variance of Logarithms | $v_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\log \left(\frac{y_i}{y^*} \right) \right]^2$ | $(0, \infty)$ | $\frac{2}{n} \left[\frac{1}{y_j} \log \left(\frac{y_j}{y^*} \right) - \frac{1}{y_i} \log \left(\frac{y_i}{y^*} \right) \right]$ |
| Gini | $G = \frac{1}{2n^2\bar{y}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_i - y_j $ | $\left(0, \frac{n-1}{n}\right)$ | $\frac{[j] - [i]}{n^2\bar{y}}$ |
| Atkinson | $A_\epsilon = 1 - \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i}{\bar{y}} \right]^{1-\epsilon} \right]^{\frac{1}{1-\epsilon}}$ | $\left(0, 1 - n^{-\frac{\epsilon}{1-\epsilon}}\right)$ | $\frac{y_i^{-\epsilon} - y_j^{-\epsilon}}{n\bar{y}^{1-\epsilon} [1 - A_\epsilon]^{-\epsilon}}$ |
| Dalton | $D_\epsilon = 1 - \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i^{1-\epsilon} - 1}{\bar{y}^{1-\epsilon} - 1}$ | $\left(0, \frac{1 - n^{1-\epsilon}}{1 - n\bar{y}^{1-\epsilon}}\right)$ | $\frac{1 - \epsilon}{n} \frac{y_i^{-\epsilon} - y_j^{-\epsilon}}{\bar{y}^{1-\epsilon} - 1}$ |
| Generalized Entropy | $E_\theta = \frac{1}{\theta^2 - \theta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i}{\bar{y}} \right]^\theta - 1 \right]$ | $(0, \infty)$ | $\frac{1}{\theta - 1} \frac{y_j^{\theta-1} - y_i^{\theta-1}}{n\bar{y}^\theta}$ |
| Herfindahl | $H = \frac{1}{n} [c^2 + 1]$ | $\left(0, \frac{1}{n}\right)$ | $2 \frac{y_j - y_i}{n^2\bar{y}^2}$ |
| Theil | $T = \sum_{i=1}^n s_i \log(ns_i)$ | $(0, \log n)$ | $\frac{1}{n\bar{y}} \log \left(\frac{y_j}{y_i} \right)$ |

$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_i y_i$ = arithmetic mean ; $y^* = \exp\left(\frac{1}{n} \sum \log y_i\right) = [y_1 y_2 y_3 \dots y_n]^{\frac{1}{n}}$ = geometric mean
 $s_i = \frac{y_i}{n\bar{y}}$ = share of agents i 's income in total income

Quelle: Cowell (1995), S. 139/140.

Tabelle 10: Which Measure Does What?

| Name | Principle of Transfers | Distance Concept | Decomposable | Independent of income scale and population size? | Range in interval $[0, 1]$? |
|---------------------------------|------------------------|---|--------------|--|------------------------------|
| Variance, V | Strong | Absolute difference | Yes | No: increases with income | No |
| Coeff. of variation, c | Weak | As for variance | Yes | Yes | No |
| Relative Mean Deviation, M | Just Fails | 0, if incomes on same side of \bar{y} , or 1 otherwise | No | Yes | No: in $[0, 2]$ |
| Logarithmic variance, v | Fails | Differences in (log-income \div income) | No | Yes | No |
| Variance of logarithms, v_1 | Fails | As for logarithmic variance | No | Yes | No |
| Equal shares coefficient | Just Fails | As for relative mean deviation | No | Yes | Yes |
| Minimal Majority | Just Fails | Similar to M (critical income is median y , not \bar{y}) | No | Yes | Yes |
| Gini, G | Weak | Depends on rank ordering | No | Yes | Yes |
| Atkinson's index, A_ϵ | Weak | Difference in marginal social utilities | Yes | Yes | Yes |
| Dalton's index, D_ϵ | Weak | As for Atkinson's index | Yes | No | No |
| Theil's entropy index, T | Strong | Proportional differences | Yes | Yes | No |
| Herfindahl's index, H | Strong | As for variance | Yes | No; decreases with population | Yes: but $\min > 0$ |
| Generalized Entropy, E_θ | Strong | Power Function | Yes | Yes | No |

Note: "Just Fails" means a rich-to-poor transfer may leave inequality unchanged rather than reducing it.

Quelle: Cowell (1995), S. 66.

Literatur

- Atkinson, A. B., "On the Measurement of Inequality," *Journal of Economic Theory*, 1970, 2, 244–263.
- and J. E. Stiglitz, *Lectures on Public Economics*, international ed., Singapore: McGraw–Hill, 1980.
- Bergson, A., "A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics," *Quarterly Journal of Economics*, 1938, 52, 310–334.
- Cowell, F. A., *Measuring Inequality*, 2nd ed., Hemel Hempstead, UK: Prentice Hall/Harvester Wheatsheaf, 1995.
- , "The Measurement of Inequality," in A. B. Atkinson and F. Bourguignon, eds., *Handbook of Income Distribution*, Vol. 1, Amsterdam: Elsevier, 2000, pp. 87–166.
- Edgeworth, F. Y., "The Pure Theory of Taxation," *Economic Journal*, 1897, 7, 46–70, 226–238 and 550–571.
- Harsanyi, J., "Cardinal Welfare, Individual Ethics, and Interpersonal Comparability of Utility," *Journal of Political Economy*, 1955, 61, 309–321.
- Jakobsson, U., "On the Measurement of the Degree of Progression," *Journal of Public Economics*, 1976, 5, 161–168.
- Lambert, P. J., *The Distribution and Redistribution of Income: A Mathematical Analysis*, 2nd ed., Manchester, UK: Manchester University Press, 1993.
- Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.
- Nozick, R., *Anarchy, State und Utopia*, Oxford: Basil Blackwell, 1974.
- Okun, A. M., *Equality and Efficiency*, Washington D.C.: Brookings Institution, 1975.
- Pen, J., "A Parade of Dwarfs (and a Few Giants)," in A. B. Atkinson, ed., *Wealth, Income and Inequality: Selected Readings*, Harmondsworth, Middlesex, England: Penguin Books, 1973, pp. 73–82.
- Rawls, J., *A Theory of Justice*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1971.
- Robbins, L., "Interpersonal Comparisons of Utility: A Comment," *Economic Journal*, 1938, 48, 635–641.
- Samuelson, P. A., *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press, 1947.
- Sen, A. K., "Interpersonal Aggregation and Partial Comparability," *Econometrica*, 1970, 38, 393–409.
- , "Social Choice Theory: A Re-examination," *Econometrica*, 1977, 45, 393–409.
- Shorrocks, A. F., "Ranking Income Distributions," *Economica*, 1983, 50, 1–17.
- Smith, A., *The Theory of Moral Sentiments*, edited by D. D. Raphael and A. L. Macfie, *The Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith*, Volume I, University of Glasgow, 1976 ed., Indianapolis: Liberty Press, 1759.
- , *An Inquiry into the Nature and Causes of the Wealth of Nations*, edited by R. H. Campbell, A. S. Skinner and W.B. Todd, *The Glasgow Edition of the Works and Correspondence of Adam Smith*, Volume II, University of Glasgow, 1976 ed., Indianapolis: Liberty Press, 1776.