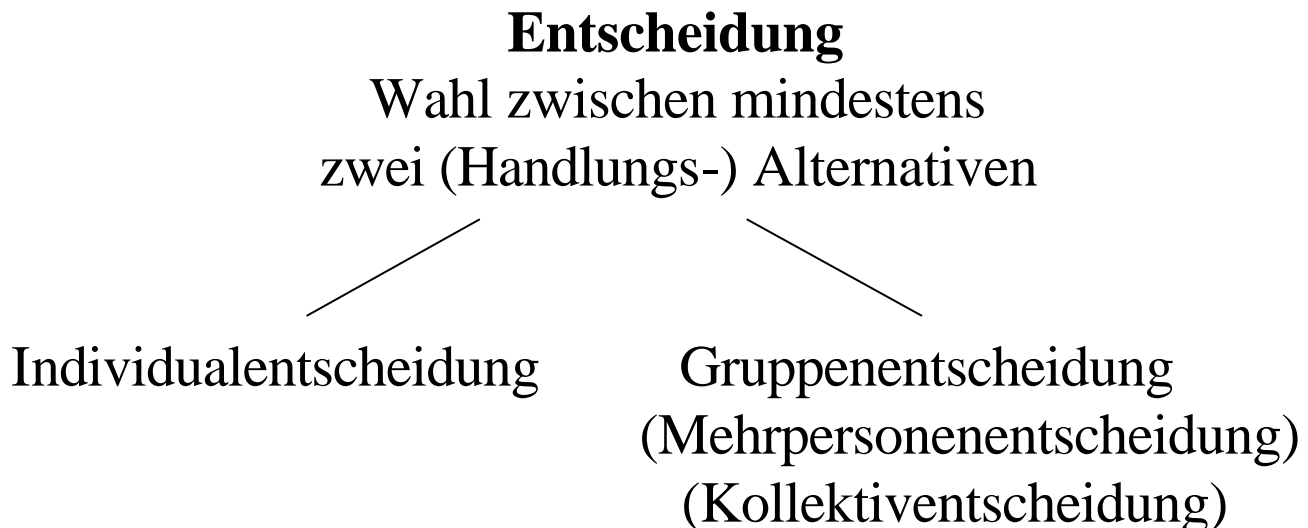


5. ENTSCHEIDUNGEN IN GRUPPEN

5.1 Die Gruppe als Entscheidungsträger

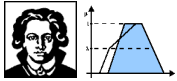


Gruppenentscheidung:

Ermittlung einer Problemlösung durch eine Gruppe von Entscheidungsträgern in einer bestimmten Situation.

- Mitglieder beschaffen sich Informationen,
- Tauschen diese untereinander aus,
- diskutieren die Konsequenzen der Alternativen,
- bilden individuelle Präferenzordnungen.

Annahme: Alle Gruppenmitglieder orientieren sich bestmöglich an vorgegebenem Ziel



Formale Darstellung der Gruppenentscheidung:

- Gruppe/Entscheidungsgremium: N Mitglieder
- Menge A der relevanten Alternativen a, b, c,.... (für alle Mitglieder verbindlicher *Aktionsraum* der Gruppe)

- Darstellung der Präferenzen

$$a \succeq b, \quad a \succ b, \quad a \sim b$$

$$\text{oder } a R b, \quad a P b, \quad a I b$$

P, R, I ohne Index = Gruppenpräferenzordnung

- Darstellung der Präferenzen der einzelnen Gruppenmitglieder durch zusätzliche Indizierung mit der Personennummer, hier beispielhaft für das i-te Mitglied:

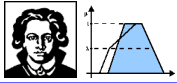
$$a \succeq_i b, \quad a \succ_i b, \quad a \sim_i b$$

$$\text{oder } a R_i b, \quad a P_i b, \quad a I_i b$$

- Jedes der N Mitglieder hat hinsichtlich der Aktionen eine transitive und vollständige Präferenzordnung

Z.B. Präferenzordnung des Mitgliedes i in Bezug auf 4 Alternativen: $(a_1 P_i a_2 I_i a_3 P_i a_4)$

- **HOMOGENE GRUPPE**



Übereinstimmung aller Mitglieder bezüglich ihrer Ziele und der Bewertung der übrigen Details der Entscheidungssituation (= Individualentscheidung)

- **HETEROGENE GRUPPE**

Mitglieder mit divergierenden Einzelinteressen

→ Gruppenurteil unter angemessener Berücksichtigung der Interessen aller Gruppenmitglieder

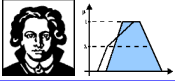
Möglichkeiten der Bildung von Gruppenurteilen

- Bei der Bewertung von Ergebnissen fließen die Vorstellungen **aller** Gruppenmitglieder mit ein.

- **zweistufiges Vorgehen:**

1. Individualrangordnung für jedes Gruppenmitglied

1. Zusammenfassung zur Gruppenrangordnung, die die Gruppe nach außen hin geschlossen vertritt

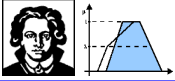


5.2. Gruppenentscheidung mit Hilfe von Abstimmungsregeln

→ In der Realität besteht oft keine Notwendigkeit, dass ein Entscheidungsgremium eine komplette Präferenzordnung aller Alternativen liefern muß, sondern häufig ist nur die Auswahl der besten Alternative von Interesse.

ENTSCHEIDUNGSPROZESS:

- Bei Delegation der Entscheidung an eine Gruppe erhalten die Mitglieder z.B. die Weisung, aus der Menge der gegebenen Alternativen diejenige mit dem höchsten Gewinnerwartungswert auszuwählen
 - Gruppenmitglied besitzt zu Beginn mehr oder weniger präzise Vorstellungen von seiner Präferenzordnung
 - in der Regel abweichende Präferenzordnungen der einzelnen Gruppenmitglieder
- Aktivitäten zur Beeinflussung der individuellen Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder
- Individuelle Präferenzordnungen der Gruppenmitglieder am Ende des Informationsprozesses der Gruppe
- Endgültige Auswahl einer Handlungsalternative durch formelle/informelle Abstimmung



- Welche Handlungsalternative von einer Gruppe bei formeller Abstimmung gewählt wird, ist abhängig
- von den Präferenzordnungen der einzelnen Mitglieder im Zeitpunkt der Abstimmung,
 - von der Abstimmungsregel.

Beispiel: Personalentscheidung

Der Personalchef Schmidt und seine zwei Abteilungsleiter Frau Meier und Herr Müller sollen unter 3 Kandidaten (a, b, c) den besten auswählen.

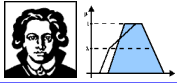
Präferenzordnungen:

Herr Schmidt $a \succ b \succ c$

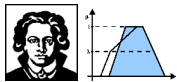
Frau Meier $b \succ c \succ a$

Herr Müller $b \succ c \succ a$

AUSGEWÄHLTE ABSTIMMUNGSREGELN



- **Einstimmigkeitsregel**
- **Methode der absoluten Mehrheit**
 - Jeder Wähler hat **eine** Stimme, die Alternative mit (mehr als) 50% der Stimmen wird gewählt.
- **Methode der einfachen Mehrheit (Single Vote)**
 - Jeder Wähler hat **eine** Stimme, die Alternative mit den meisten Stimmen wird gewählt.
- **Double-Vote-Verfahren**
 - Jeder Wähler hat **zwei** gleichgewichtige Stimmen, die er den beiden Alternativen gibt, die in seiner Präferenzordnung am höchsten stehen; die Alternative mit den meisten Stimmen wird gewählt.
- **Double-Election**
 - 1. Wahlgang - Wie absolute Mehrheit; falls es eine solche Alternative gibt, ist die Abstimmung beendet; wenn nicht:
 - 2. Wahlgang – Einfache Abstimmung zwischen den beiden Alternativen mit den meisten Stimmen im 1. Wahlgang
- **Methode des paarweisen Vergleichs (Mehrheitsregel)**



- Alternativen werden der Reihe nach paarweise zur Abstimmung gegenübergestellt; eine geschlagene Alternative kann nicht wieder zur Konkurrenz antreten; das Gremium entscheidet sich für die schließlich übrigbleibende Alternative.
- Condorcet-Alternative:
Alternative, die im Vergleich mit jeder anderen Handlungsalternative immer die Mehrheit erhält

$$a P_1 b P_1 c$$

$$c P_2 b P_2 a \quad \Rightarrow \quad b \succ c \succ a$$

$$b P_1 c P_2 a$$

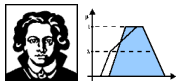
- **Verfahren von Borda** (Punktbewertungsverfahren)

Jeder Wähler gibt der Alternative, die auf dem letzten Platz seiner individuellen Präferenzordnung steht, **ei-nen** Punkt; derjenigen Alternative, die auf dem vorletzten Platz seiner individuellen Präferenzordnung steht, **zwei** Punkt etc.; bei n Alternativen erhält auf diese Weise die Alternative, die auf dem ersten Platz der individuellen Präferenzordnung steht, **n** Punkte.

Diejenige Alternative, die die meisten Punkte erhält, wird gewählt.

Abstimmungsmatrix I: 6 Alternativen A-F,

9 Gremiumsmitglieder



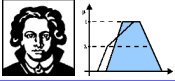
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9
1.	A	A	A	A	D	D	F	F	F
2.	B	C	B	F	B	B	B	B	E
3.	C	D	D	E	E	F	D	D	D
4.	D	E	E	C	C	C	E	E	C
5.	E	F	C	B	F	E	C	C	B
6.	F	B	F	D	A	A	A	A	A

Welches LKW-Modell wird gewählt?

Wahlergebnisse bei Anwendung der verschiedenen Wahlverfahren:

- Einstimmigkeitsregel *keine Lösung*
- Absolute Mehrheit *keine Lösung*
- Einfache Mehrheit $A \succ F \succ D$
- Double-Vote $B \succ F \sim A$
- Double Election $F \succ A$
- Methode des paarweisen Vergleichs
- Verfahren nach Borda $D \succ B \succ F \succ A$
36 35 31 29

Abstimmungsmatrix II: 6 Alternativen A-F,
9 Gremiumsmitglieder



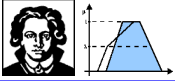
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9
1.	B	B	A	F	D	C	A	A	A
2.	A	A	E	E	E	D	E	D	F
3.	D	C	B	B	B	F	C	B	D
4.	F	E	C	A	A	B	B	C	C
5.	C	F	F	C	F	A	D	F	B
6.	E	D	D	D	C	E	F	E	E

Welches LKW-Modell wird gewählt?

Wahlergebnisse bei Anwendung der verschiedenen Wahlverfahren:

- Einstimmigkeitsregel
- Absolute Mehrheit
- Einfache Mehrheit
- Double-Vote
- Double Election
- Methode des paarweisen Vergleichs
- Verfahren nach Borda

Kritische Bewertung:



- Nicht jede Abstimmungsregel liefert eine eindeutige Auswahl
- Gewählte Abstimmungsregel bestimmt (eventuell) die Entscheidung

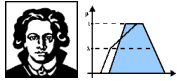
Frage:

Welche Abstimmungsregel ist die richtige?

bzw.

welche Abstimmungsregel ist "gerecht"?

5.3 Das Problem einer gerechten Aggregation individueller Präferenzen

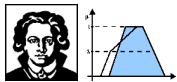


5.3.1 Formale Grundlagen und Präferenzordnungsprofile

- Entscheidungsgremium: N Individuen
- Menge A von relevanten Alternativen a, b, c, \dots
(für alle Mitglieder verbindlicher *Aktionsraum* der Gruppe)
- Darstellung der Präferenzen der einzelnen Gruppenmitglieder durch zusätzliche Indizierung mit der Personennummer, hier beispielhaft für das i -te Mitglied:
$$a \succeq_i b, \quad a \succ_i b, \quad a \sim_i b$$

oder
$$a R_i b, \quad a P_i b, \quad a I_i b$$
- P, R, I ohne Index = Gruppenpräferenzordnung
- Jedes der N Mitglieder hat hinsichtlich der Aktionen eine transitive und vollständige Präferenzordnung

Beispiel: Gruppe mit 2 Entscheidern, 3 Alternativen,
3 mögliche Umweltentwicklungen mit bekannten
Eintrittswahrscheinlichkeiten



	Gruppenmitglied 1				Erwartungs- wert
s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	
$p(s_i)$	0,1	0,3	0,2	0,4	
a_1	100	60	40	80	
a_2	80	70	50	70	
a_3	100	50	20	100	

Alternativenbewertung des risikoneutralen Mitglieds 1

- ❖ Die Risikoeinstellung des Gruppenmitglieds 2 sei repräsentiert durch: $u_{ij} = -0,1 (e_{ij})^2 + 20 e_{ij}$

	Gruppenmitglied 2				Erwartungs- wert
s_i	s_1	s_2	s_3	s_4	
$p(s_i)$	0,1	0,3	0,2	0,4	
a_1	1000	840	640	960	
a_2	960	910	750	910	
a_3	1000	750	360	1000	

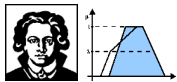
Alternativenbewertung des risikoscheuen Mitglieds 2

Präferenzordnungen der beiden Gruppenmitglieder:

Mitglied 1:

Mitglied 2:

Beispiel: Bewerberauswahl



Eine Gruppe von drei Gesellschaftern einer GmbH soll aus zwei Bewerbern den Geschäftsführer für ihre Gesellschaft auswählen. Gesucht ist die Menge aller vollständigen und transitiven Präferenzordnungen auf dem Aktionsraum.

a_1 : Auswahl des ersten Bewerbers

a_2 : Auswahl des zweiten Bewerbers

Aktionsraum: $A =$

- Die Menge aller vollständigen und transitiven Präferenzordnungen auf den Aktionsraum A wird mit H bezeichnet.

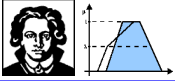
$H =$

- Zusammenfassung der N Präferenzordnungen zu einem N -Tupel (R_1, \dots, R_N) **Präferenzordnungsprofil**

Menge der Präferenzordnungsprofile für das Beispiel Bewerberauswahl

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_2 \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ a_2 & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ P_1 & P_2 & I_3 \\ a_2 & a_2 & a_2 \end{pmatrix} \dots$$

→ 27 mögliche Präferenzordnungsprofile



- Ein **Aggregationsmechanismus** M ordnet jedem Präferenzordnungsprofil eine vollständige und transitive kollektive Präferenzordnung zu

Beispiel:

Gruppe von 2 Mitgliedern hat sich eindeutig für eine von 2 Aktionen zu entscheiden

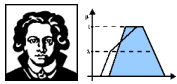
→ prinzipiell mögliche Aggregationsmechanismen:

$$\begin{pmatrix} a & a \\ P_1 & P_2 \\ b & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ P \\ b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b & b \\ P_1 & P_2 \\ a & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ P \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ P_1 & P_2 \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ P \\ b \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} a & b \\ P_1 & P_2 \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ P \\ a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ P_1 & P_2 \\ b & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} b \\ I \\ a \end{pmatrix}; \quad \dots$$

→ Problematik einer gerechten Aggregation!!



In der Praxis am häufigsten angewandte Methode zur Lösung von Gruppenentscheidungen ist die

Mehrheitsregel

(Ermittlung der Präferenzordnung über Präferenzentscheidungen im Paarvergleich)

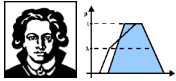
Ist die Mehrheitsregel
ein gerechter Aggregationsmechanismus ?

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ b & c & a \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ c & a & b \end{pmatrix} \quad \text{kollektive Rangordnung:}$$

- Mehrheitsentscheidung aus transitiven individuellen Präferenzordnungen führt zu intransitiver kollektiver Präferenzordnung
= **Wahlparadoxon** (1785 Marquis de Condorcet)
- Mehrheitsentscheidung ist **kein** geeigneter Aggregationsmechanismus, da die entstehende Präferenzordnung nicht für **jedes** Präferenzordnungsprofil transitiv ist.

5.3.2 Anforderungen an gerechte



Aggregationsmechanismen

- Ein Aggregationsmechanismus, der die Interessen aller Gruppenmitglieder angemessen berücksichtigt, wird als gerecht angesehen.
- Überprüfung der "angemessenen Berücksichtigung" anhand von allgemein akzeptablen Anforderungen, die eine gerechte Aggregationsfunktion (Sozialwahlfunktion) erfüllen soll

Anforderungssystem in Anlehnung an Kenneth J. Arrow - Social Choice and Individual Values, 1951

A 1 (Uneingeschränkter Definitionsbereich)

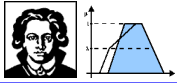
Jedes logisch mögliche Präferenzordnungsprofil gehört zum Definitionsbereich der Sozialwahlfunktion.

A 2 (Unabhängigkeit von irrelevanten Alternativen)

Die Gruppenpräferenzordnung hinsichtlich zweier Alternativen a und b darf nur durch die individuellen Präferenzen bezüglich a und b bedingt werden und darf nicht von weiteren Alternativen abhängen.

Führt z. B. eine Abstimmungsregel dazu, dass die Gruppe die Alternative a gegenüber der Alternativen b präferiert, so muss dies auch gelten, wenn eine beliebige weitere Alternative zusätzlich eingeführt wird und die individuellen Präferenzen bezüglich a und b konstant geblieben sind.

Anforderung 3 (Pareto-Bedingung)



Präferieren alle Mitglieder eine Alternative gegenüber einer anderen Alternative, so muss diese Alternative auch in der kollektiven Präferenzordnung der anderen Alternative vorgezogen werden.

Anforderung 4 (Diktaturverbot)

Ein Aggregationsmechanismus darf nicht so definiert sein, dass die Gruppe immer dann eine Alternative a gegenüber Alternative b vorziehen muss, wenn ein bestimmtes Gruppenmitglied Alternative a gegenüber Alternative b präferiert.

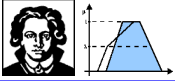
5.3.3 Unmöglichkeitstheorem von Arrow

Kenneth J. Arrow versuchte Aggregationsmechanismus zu konstruieren, der diese allgemeinen Anforderungen erfüllt und daher als gerecht bezeichnet werden kann.

⇒ **unmöglich!!**

⇒ **Unmöglichkeitstheorem:**

Bei Anzahl der Alternativen ≥ 3 existiert kein Aggregationsmechanismus, der alle 4 Forderungen gleichzeitig erfüllt.



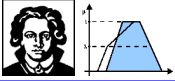
5.3.4 Konsequenzen aus dem Unmöglichkeitstheorem

Grundsätzlich existieren nur 2 Möglichkeiten zur Bestimmung eines Aggregationsmechanismus:

1. Änderung der Problemformulierung
2. Gleiche Problemformulierung, aber Verzicht auf eine/einige Forderungen bzw. Modifikation der Forderungen:
 - Modifikation der Forderung nach universellem Definitionsbereich:
 - Versuch, gänzlich uneinheitliche Präferenzordnungsprofile auszuschließen, da sonst kein Ansatzpunkt für eine ein- bzw. mehrheitliche Beurteilung durch die Gruppe existiert.

"Existiert ein Mindestmaß an Homogenität in der Gruppe bezüglich der Reihung der Aktionen, dann existiert auch ein gerechter Aggregationsmechanismus im Sinne der Anforderungen von Arrow."

Duncan Black 1969, 1972

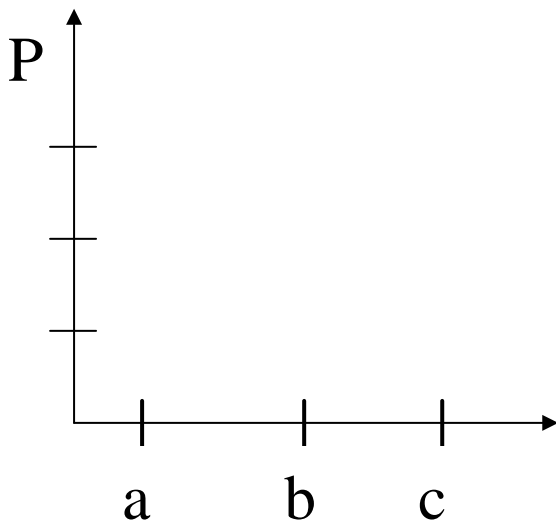


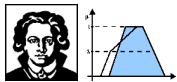
→ Eingipfelbedingung:

Die erforderliche Homogenität liegt vor, wenn mindestens eine Anordnung der Aktionen auf der Abszisse eines Koordinatensystems existiert derart, daß die in Ordinateurichtung aufgetragenen Präferenzen **aller** Gruppenmitglieder bezüglich der Aktionen jeweils nur ein einziges (lokales) Maximum aufweisen.

Beispiel 1:

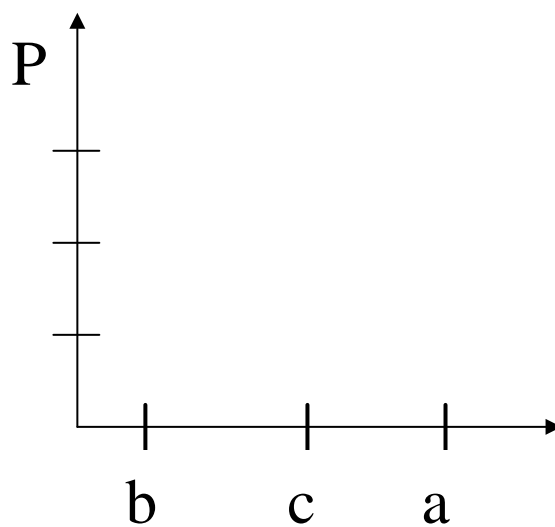
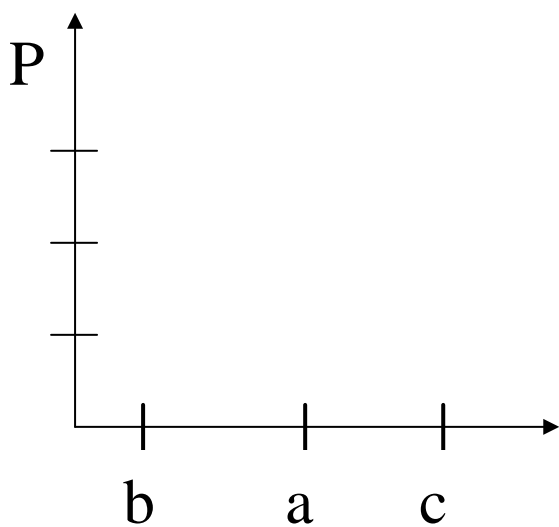
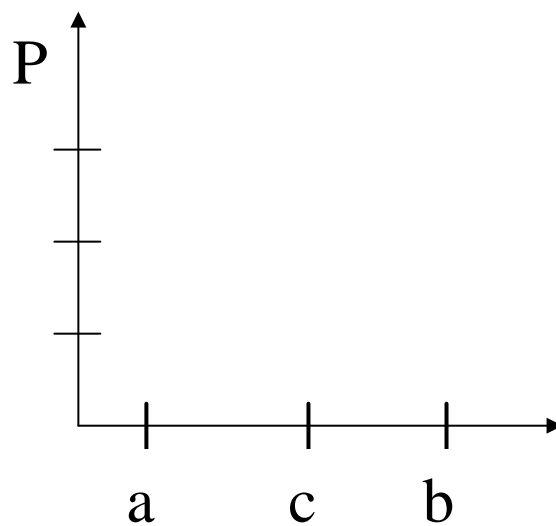
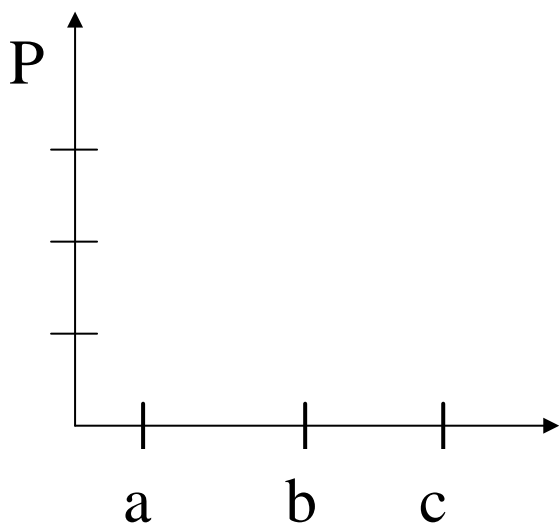
$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ b & b & c \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ c & a & a \end{pmatrix}$$

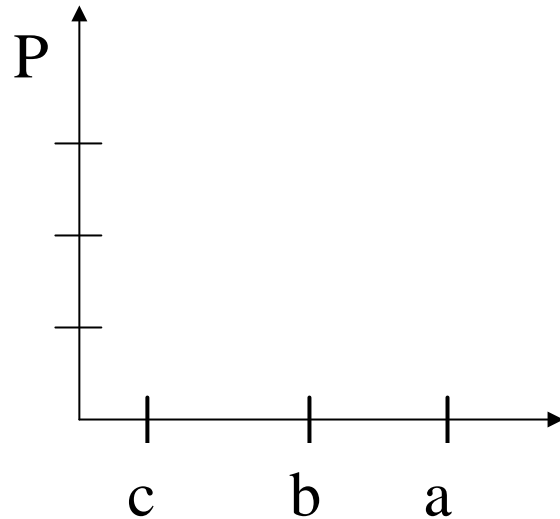
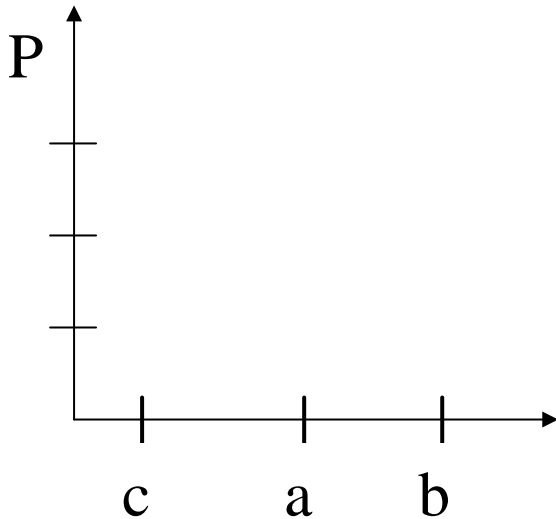
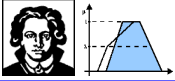




Beispiel 2:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ b & c & a \\ P_1 & P_2 & P_3 \\ c & a & b \end{pmatrix}$$





→ Bei Überprüfung aller sechs möglichen Anordnungen:

Theorem von Duncan Black:

Ist die Anzahl der Mitglieder der Gruppe ungerade und erfüllt das Präferenzordnungsprofil die Eingipfelbedingung, so ist der Mehrheitsentscheid ein Aggregationsmechanismus, der den übrigen Anforderungen Arrows gleichzeitig genügt.